

Satz. Alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent.

Beweis. Es seien $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ zwei Normen auf $\mathbb{R}^n$. Wir dürfen ohne Einschränkung annehmen, dass $\|\cdot\|'$ die Maximums-Norm ist.

(1) Zunächst zeigen wir, dass es eine Konstante $A \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\|x\| \leq A \cdot \|x\|' \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n. \quad (*)$$

Dazu sei $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ die Entwicklung von x nach den kanonischen Einheitsvektoren e_i . Es gilt dann

$$\begin{aligned} \|x\| &= \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \|e_i\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \|x\|_{\infty} \cdot \|e_i\|. \end{aligned}$$

Mit $A := \sum_{i=1}^n \|e_i\|$ ist daher $(*)$ erfüllt.

(2) Es sei nun $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|' = 1\}$ die Einheitskugel (bezüglich der Maximums-Norm). Wir behaupten, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} f: S &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x\| \end{aligned}$$

stetig ist (bezüglich der Maximums-Norm). Dies folgt aus der folgenden Abschätzung für $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |\|x\| - \|y\|| \\ &\leq \|x - y\| \\ &\leq A \cdot \|x - y\|', \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Ungleichung $(*)$ aus (1) verwendet haben.

(3) Bezüglich der Maximumsnorm ist die Einheitskugel S kompakt und die Abbildung f ist – ebenfalls bezüglich der Maximumsnorm – nach (2) stetig. Daher nimmt f auf S ein Minimum an, d.h. es gibt eine Konstante $B \in \mathbb{R}$ mit

$$\|x\| \geq B \quad \text{für alle } x \in S.$$

Für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ folgt daraus

$$\left\| \frac{x}{\|x\|'} \right\| \geq B$$

und daher

$$\|x\| \geq B \cdot \|x\|'. \quad (**)$$

Aus $(*)$ und $(**)$ folgt die Äquivalenz der beiden Normen. □