Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps Universität Marburg
Prof. Dr. Th. Bauer, Chr. Schulz

Sommersemester 2001

Klausur zur Analysis II,SS 2001
Freitag, den 06.07.2001, **11.05 - 13.05 Uhr**

Name								
Matrikelnummer								
Tutorengruppe								
Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Erreichbare Punkte	10	$3+4+3$	$7+3$	$7+3$	10	$7+3$	$5+5$	70
Erreichte Punkte								

Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt aus und versehen Sie alle Blätter mit Ihrem Namen!
Bearbeiten Sie die Aufgaben auf den ausgegebenen Blättern. Sollte der Platz unter der Aufgabenstellung und auf der Rückseite des Aufgabenblattes nicht ausreichen, so benutzen Sie bitte die leeren Blätter am Ende der Klausur.
Geben Sie die Klausur möglichst nach Aufgaben geordnet und geheftet ab (ein Hefter befindet sich bei der Abgabestelle).
Es sind keinerlei Hilfsmittel zugelassen.

Wir wünschen viel Erfolg!

Aufgaben:

Aufgabe 1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Siehe dort!

Aufgabe 2. Betrachten Sie die Abbildung

$$\begin{aligned} d: \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ d(x,y) &= \begin{cases} 1 & \text{falls } x \neq y \ , \\ 0 & \text{falls } x = y \ . \end{cases} \end{aligned}$$

a) Weisen Sie nach, dass d eine Metrik auf $\mathbb{R}^n$ ist.

b) Zeigen Sie, dass bzgl. d alle Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

c) Beweisen Sie, dass jede kompakte Teilmenge des metrischen Raums $(\mathbb{R}^n, d)$ nur endlich viele Elemente enthält.

Aufgabe 3.

a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \ , \\ \frac{y^3}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \end{cases} \end{aligned}$$

partiell differenzierbar ist und berechnen Sie die partiellen Ableitungen.

b) Ist f stetig partiell differenzierbar im Nullpunkt?

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass es ein $\varepsilon > 0$ und eine $\mathcal{C}^1$-Funktion $f:]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[\to \mathbb{R}$ gibt mit $f(1) = 1$ und $x^{f(x)} = f(x)^x$ für alle $x \in]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[$.

Aufgabe 5. Sei $B := \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| < 1\}$, $\overline{B} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| \leq 1\}$ und $f: \overline{B} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Sei weiterhin $f|_B$ differenzierbar und $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $||x|| = 1$. Beweisen Sie, dass ein $\widetilde{x} \in B$ existiert mit $\operatorname{grad} f(\widetilde{x}) = 0$.

Aufgabe 6.

a) Bestimmen Sie alle Minima und Maxima der Funktion

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\mapsto x \cdot z \end{aligned}$$

auf der Menge $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

b) Bestimmen Sie den Wertebereich $f(M)$.

Aufgabe 7.

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y''' - 4y'' + 4y' = 0 \ .$$

b) Berechnen Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \exp(y) \cdot x \cdot \sin(x) \ , \qquad D := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ .$$

Aufgabe 1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. **Kreuzen Sie die entsprechende Antwort an.** Es werden **keine** Begründungen verlangt. Jede richtig beantwortete Teilaufgabe bringt einen Punkt, jede falsch beantwortete Teilaufgabe ergibt einen Punkt Abzug. Nicht beantwortete Teile werden nicht gewertet.

1. Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist Regelfunktion. *richtig* ☐ *falsch* ☐

2. Jede monotone Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ besitzt nur abzählbar viele Unstetigkeitsstellen. *richtig* ☐ *falsch* ☐

3. Je zwei Metriken auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent. *richtig* ☐ *falsch* ☐

4. Jede kompakte Teilmenge eines normierten Vektorraums ist beschränkt und abgeschlossen. *richtig* ☐ *falsch* ☐

5. Auf einer beschränkten und abgeschlossenen Teilmenge M eines beliebigen metrischen Raumes nimmt jede Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ Maximum und Minimum an. *richtig* ☐ *falsch* ☐

6. Jede partiell differenzierbare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist total differenzierbar. *richtig* ☐ *falsch* ☐

7. Jede $\mathcal{C}^1$-Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $\det(Df(x)) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist ein Diffeomorphismus. *richtig* ☐ *falsch* ☐

8. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^1$-Funktion und $\widetilde{x}$ ein Punkt mit $\operatorname{grad} f(\widetilde{x}) = 0$. Dann ist $\widetilde{x}$ eine Extremstelle von f. *richtig* ☐ *falsch* ☐

9. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^1$-Funktion und $\widetilde{x}$ ein lokales Maximum von f. Dann ist $\operatorname{grad} f(\widetilde{x}) = 0$ und $\mathrm{H}_f(\widetilde{x})$ negativ definit. *richtig* ☐ *falsch* ☐

10. Seien X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Dann ist das Bild $f(A)$ einer bogenzusammenhängenden Menge A zusammenhängend *richtig* ☐ *falsch* ☐

Aufgabe 2. Betrachten Sie die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} d: \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ d(x,y) & = & \begin{cases} 1 & \text{falls } x \neq y \ , \\ 0 & \text{falls } x = y \ . \end{cases} \end{array}$$

a) Weisen Sie nach, dass d eine Metrik auf $\mathbb{R}^n$ ist.

b) Zeigen Sie, dass bzgl. d alle Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

c) Beweisen Sie, dass jede kompakte Teilmenge des metrischen Raums $(\mathbb{R}^n, d)$ nur endlich viele Elemente enthält.

Aufgabe 3.

a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f: \quad \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0)\ , \\ \frac{y^3}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \end{cases} \end{array}$$

partiell differenzierbar ist und berechnen Sie die partiellen Ableitungen.

b) Ist f stetig partiell differenzierbar im Nullpunkt?

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass es ein $\varepsilon > 0$ und eine $\mathcal{C}^1$-Funktion $f :]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[\to \mathbb{R}$ gibt mit $f(1) = 1$ und $x^{f(x)} = f(x)^x$ für alle $x \in]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[$.

Aufgabe 5. Sei $B := \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| < 1\}$, $\overline{B} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| \leq 1\}$ und $f : \overline{B} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Sei weiterhin $f|_B$ differenzierbar und $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $||x|| = 1$. Beweisen Sie, dass ein $\widetilde{x} \in B$ existiert mit $\mathrm{grad} f(\widetilde{x}) = 0$.

Aufgabe 6.

a) Bestimmen Sie alle Minima und Maxima der Funktion

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \mapsto & x \cdot z \end{array}$$

auf der Menge $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

b) Bestimmen Sie den Wertebereich $f(M)$.

Aufgabe 7.

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y''' - 4y'' + 4y' = 0 \ .$$

b) Berechnen Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \exp(y) \cdot x \cdot \sin(x) \ , \qquad D := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ .$$

Zusatz zu Aufgabe ...

Zusatz zu Aufgabe ...

Zusatz zu Aufgabe ...

Zusatz zu Aufgabe ...