Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps Universität Marburg
Prof. Dr. Th. Bauer, Chr. Schulz

Sommersemester 2001

Wiederholungsklausur zur Analysis II, SS 2001
Freitag, den 05.10.2001, **10.05 - 12.05 Uhr**

Name							
Matrikelnummer							
Tutorengruppe							
Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Erreichbare Punkte	10	10	10	10	10	$5+5$	$5+5$	70
Erreichte Punkte								

Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt aus und versehen Sie alle Blätter mit Ihrem Namen!
Bearbeiten Sie die Aufgaben auf den ausgegebenen Blättern. Sollte der Platz unter der Aufgabenstellung und auf der Rückseite des Aufgabenblatts nicht ausreichen, so benutzen Sie bitte die leeren Blätter am Ende der Klausur.
Geben Sie die Klausur möglichst nach Aufgaben geordnet und geheftet ab (ein Hefter befindet sich bei der Abgabestelle).
Es sind keinerlei Hilfsmittel zugelassen.

Wir wünschen viel Erfolg!

Aufgaben:

Aufgabe 1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Siehe dort!

Aufgabe 2. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Beweisen Sie, dass

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_0^{h(x)} f(t)\, dt \end{aligned}$$

eine differenzierbare Funktion ist und geben Sie ihre Ableitung an.

Aufgabe 3. Es sei (X, d_X) ein metrischer Raum, und seien A und Y Teilmengen von X mit $A \subset Y$. Zeigen Sie: Ist A in (X, d_X) abgeschlossen, dann ist A auch in (Y, d_Y) abgeschlossen, wobei

$$\begin{aligned} d_Y : Y \times Y &\to \mathbb{R} \\ (y,z) &\mapsto d_X(y,z) \end{aligned}$$

die Einschränkung von d_X auf Y ist.

Aufgabe 4. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion, deren partielle Ableitungen beschränkt sind. Zeigen Sie, dass f stetig ist.
(Hinweis: Mittelwertsatz in $\mathbb{R}^n$)

Aufgabe 5. Bestimmen Sie die Taylorentwicklung von

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \exp(x) \cdot \sin(y) \end{aligned}$$

im Punkt $(0, \frac{\pi}{2})$ bis zu den Gliedern zweiter Ordnung.

Aufgabe 6. Betrachten Sie in $\mathbb{R}^3$ die Flächen

$$S_1 := \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1 \} ,$$

$$S_2 := \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1 \} .$$

a) Beweisen Sie, dass die Schnittkurve $S_1 \cap S_2$ eine kompakte eindimensionale Untermanigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.
b) Berechnen Sie den maximalen und minimalen Abstand der Schnittkurve zum Nullpunkt.
(Hinweis: Das Quadrat des Abstandes lässt sich meist besser handhaben.)

Aufgabe 7. Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:
a) $y' = \sqrt{1 - y^2}$, $|y| < 1$,
b) $y'' - 3y' + 2y = \exp(-x)$.

Aufgabe 1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. **Kreuzen Sie die entsprechende Antwort an.** Es werden **keine** Begründungen verlangt. Jede richtig beantwortete Teilaufgabe bringt einen Punkt, jede falsch beantwortete Teilaufgabe ergibt einen Punkt Abzug. Nicht beantwortete Teile werden nicht gewertet.

1. Jede stetig differenzierbare Kurve $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ hat eine endliche Bogenlänge.
   richtig □ *falsch* □

2. Der punktweise Limes einer Folge von Regelfunktionen ist eine Regelfunktion.
   richtig □ *falsch* □

3. In einem normierten Vektorraum ist eine Teilmenge genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.
   richtig □ *falsch* □

4. Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann Regelfunktion, wenn alle einseitigen Grenzwerte $\lim\limits_{x \searrow c} f(x)$, $c \in [a,b)$ und $\lim\limits_{x \nearrow c'} f(x)$, $c' \in (a,b]$ existieren.
   richtig □ *falsch* □

5. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Der Graph einer stetigen Abbildung $f : I \to \mathbb{R}^n$ ist bogenzusammenhängend.
   richtig □ *falsch* □

6. Die Hesse-Matrix einer zweimal stetig partiell differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist die Jacobi-Matrix der Gradientenabbildung $Df : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
   richtig □ *falsch* □

7. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion, und sei $p \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt, so dass dort der Gradient $\mathrm{grad} f(p)$ der Nullvektor und die Hesse-Matrix $H_f(p)$ die Nullmatrix ist. Dann ist p keine Extremstelle von f.
   richtig □ *falsch* □

8. Seien X, Y metrische Räume. Das Bild einer abgeschlossenen Menge $A \subset X$ unter einer stetigen Abbildung $f : X \to Y$ ist immer abgeschlossen.
   richtig □ *falsch* □

9. Bei einer stetigen Abbildung $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ hängt der Wert des iterierten Integrals $\int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dy\, dx$ nicht von der Integrationsreihenfolge ab.
   richtig □ *falsch* □

10. Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Dann besitzt das Anfangswertproblem $y' = f(x,y)$, $y(a) = b$ für einen gegebenen Punkt $(a,b) \in D$ höchstens eine Lösung.
    richtig □ *falsch* □

Aufgabe 2. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Beweisen Sie, dass

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_0^{h(x)} f(t)\, dt \end{aligned}$$

eine differenzierbare Funktion ist und geben Sie ihre Ableitung an.

Aufgabe 3. Es sei (X, d_X) ein metrischer Raum, und seien A und Y Teilmengen von X mit $A \subset Y$. Zeigen Sie: Ist A in (X, d_X) abgeschlossen, dann ist A auch in (Y, d_Y) abgeschlossen, wobei

$$\begin{aligned} d_Y : Y \times Y &\to \mathbb{R} \\ (y, z) &\mapsto d_X(y, z) \end{aligned}$$

die Einschränkung von d_X auf Y ist.

Aufgabe 4. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion, deren partielle Ableitungen beschränkt sind. Zeigen Sie, dass f stetig ist.
(Hinweis: Mittelwertsatz in $\mathbb{R}^n$)

Aufgabe 5. Bestimmen Sie die Taylorentwicklung von

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \exp(x) \cdot \sin(y) \end{array}$$

im Punkt $(0, \frac{\pi}{2})$ bis zu den Gliedern zweiter Ordnung.

Aufgabe 6. Betrachten Sie in $\mathbb{R}^3$ die Flächen

$$S_1 := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1 \} ,$$

$$S_2 := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1 \} .$$

a) Beweisen Sie, dass die Schnittkurve $S_1 \cap S_2$ eine kompakte eindimensionale Untermanigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Berechnen Sie den maximalen und minimalen Abstand der Schnittkurve zum Nullpunkt.
(Hinweis: Das Quadrat des Abstandes lässt sich meist besser handhaben.)

Aufgabe 7. Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

a) $y' = \sqrt{1 - y^2}\ , \quad |y| < 1\ ,$

b) $y'' - 3y' + 2y = \exp(-x)\ .$

Zusatz zu Aufgabe ...

Zusatz zu Aufgabe ...

Zusatz zu Aufgabe ...