

Übungen zur Analysis III, WS 2001/02

Präsenzübung für das erste Tutorium

Aufgabe 1. (mündlich) (*Quader und Treppenfunktionen*)

Sei

$$Q_1 := [0, 2] \times [0, 2] \quad \text{und} \quad Q_2 := [1, 3] \times (1, 3]$$

sowie $\varphi := \chi_{Q_1} + 3\chi_{Q_2}$. Geben Sie endlich viele disjunkte Quader $\widetilde{Q}_1, \dots, \widetilde{Q}_k \subset \mathbb{R}^2$ und Zahlen $a_1, \dots, a_k$ an, so dass gilt $\varphi = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{\widetilde{Q}_i}$.

Aufgabe 2. (mündlich) (*Treppenfunktionen*)

Zeigen Sie, dass das Produkt zweier Treppenfunktionen $\varphi, \psi \in T(\mathbb{R}^n)$ wieder eine Treppenfunktion ist.

(Dies zeigt, dass der Raum der Treppenfunktionen $T(\mathbb{R}^n)$ nicht nur ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum, sondern sogar eine $\mathbb{R}$ -Algebra ist.)

Aufgabe 3. (mündlich) (*Integral für Treppenfunktionen*)

Seien $\varphi, \psi \in T(\mathbb{R}^n)$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen über das Integral für Treppenfunktionen:

- a) Linearität: Für alle reellen Zahlen λ, μ gilt $\int (\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda \int \varphi + \mu \int \psi$.
- b) Monotonie: Falls $\varphi \leq \psi$ gilt, so folgt $\int \varphi \leq \int \psi$.
- c) Beschränktheit: Es sei $\varphi = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{Q_i}$. Dann gilt

$$\left| \int \varphi \right| \leq \max\{|a_1|, \dots, |a_k|\} \cdot \sum_{i=1}^k \text{Vol}(Q_i).$$

(Hinweis: Überlegen Sie sich, dass es für je zwei Treppenfunktionen eine Menge von disjunkten Quadern gibt, mit deren Hilfe *beide* Funktionen dargestellt werden können.)