Übungen zur Analysis III, WS 2001/02

Abgabe am Donnerstag, den 25.10.2001 vor der Vorlesung

Aufgabe 4. *(Charakteristische Funktionen)*
Seien M und N Teilmengen des $\mathbb{R}^n$.

a) Zeigen Sie, dass gilt $\chi_{M\cap N} = \chi_M \cdot \chi_N$.

b) Finden (und beweisen) Sie ähnliche Formeln für $\chi_{M\cup N}$ und $\chi_{\mathbb{R}^n\setminus M}$.

Aufgabe 5. *(Nullmengen)*
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge und $\varepsilon > 0$.
Zeigen Sie, dass es **offene** Quader $Q_1, Q_2, \ldots \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so dass gilt

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Vol}(Q_i) < \varepsilon \ .$$

(Hinweis: Vergrößern Sie gegebene (eventuell nicht offene) Quader und wenden Sie einen „$\frac{1}{2^k}$-Trick“ an.)

Aufgabe 6. *(Kompakte Nullmengen)*
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Nullmenge. Zeigen Sie, dass es in diesem Fall zu jeden $\varepsilon > 0$ sogar endlich viele Quader $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k \subset \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{k} Q_i \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Vol}(Q_i) < \varepsilon \ .$$