Übungen zur Analysis III, WS 2001/02

Abgabe am Donnerstag, den 17.01.2002 vor der Vorlesung

Aufgabe 31. (Zentrische Streckung)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine d -dimensionale $\mathcal{C}^1$ -Mannigfaltigkeit und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ über M integrierbar. Sei weiterhin λ eine positive reelle Zahl und $\tilde{f} : x \mapsto f(\frac{x}{\lambda})$.

- a) Zeigen Sie, dass $\lambda \cdot M$ ebenfalls eine d -dimensionale $\mathcal{C}^1$ -Mannigfaltigkeit ist und dass gilt

$$\int_{\lambda \cdot M} \tilde{f} dS = \lambda^d \cdot \int_M f dS$$

- b) Beweisen Sie, dass gilt $\text{Vol}_d(\lambda \cdot M) = \lambda^d \cdot \text{Vol}_d(M)$.

Aufgabe 32.

Es sei $K := \{ \lambda \cdot (x, y, -1) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, \lambda \in (0, 1) \}$ die Oberfläche eines Kegels und $S := \{ (x, y, z) \in K \mid \exists t \in \mathbb{R} : (x, y) = \exp(-t) \cdot (\cos t, \sin t) \}$.

- a) Zeigen Sie, dass K eine zweidimensionale $\mathcal{C}^1$ -Mannigfaltigkeit ist und berechnen Sie $\text{Vol}_2(K)$.
- b) Zeigen Sie, dass S eine zweidimensionale Nullmenge ist.
- c) Zeigen Sie, dass S eine eindimensionale $\mathcal{C}^1$ -Mannigfaltigkeit ist und berechnen Sie $\text{Vol}_1(S)$.

Aufgabe 33. (Oberflächenberechnungen)

- a) Sei $T \subset \mathbb{R}^3$ die Oberfläche des Torus aus Aufgabe 22. Zeigen Sie, dass T eine zweidimensionale $\mathcal{C}^1$ -Mannigfaltigkeit ist und berechnen Sie $\text{Vol}_2(T)$.
- b) Sei $O \subset \mathbb{R}^3$ die Oberfläche der Kugel mit Radius r . Berechnen Sie $\text{Vol}_2(O)$.