Übungen zur Analysis III, WS 2001/02

Abgabe am Donnerstag, den 24.01.2002 vor der Vorlesung

Aufgabe 34.

a) Sei V ein n-dimensionaler reeller Vektorraum und $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform, die bezüglich einer gegebenen Basis durch die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dargestellt sei. Bestimmen Sie die Matrix der alternierenden Form ω^{alt} bezglich dieser Basis.

b) Es sei $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ die duale Basis der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass für zwei Vektoren v_1 und v_2 aus $\mathbb{R}^3$ gilt

$$\begin{pmatrix} \varphi_2 \wedge \varphi_3 \\ \varphi_3 \wedge \varphi_1 \\ \varphi_1 \wedge \varphi_2 \end{pmatrix} (v_1, v_2) = v_1 \times v_2 \ .$$

Aufgabe 35. *(Kontraktion von alternierenden n-Formen)*
Sei V ein n-dimensionaler reeller Vektorraum und $\mu \in \mathrm{Alt}^n V$ nicht die Null-Form. Zeigen Sie, dass die Kontraktions-Abbildung von μ

$$\begin{array}{rcl} \mu \llcorner \ : \ V & \to & \mathrm{Alt}^{n-1} V \\ v & \mapsto & \mu \llcorner v \quad , \end{array}$$

die durch $\mu \llcorner v(v_1, \ldots, v_{n-1}) \ := \ \mu(v, v_1, \ldots, v_{n-1})$ definiert ist, ein Vektorraum-Isomorphismus ist.

Aufgabe 36. *(Plücker-Koordinaten)*
Sei V ein n-dimensionaler reeller Vektorraum und k eine natürliche Zahl.

a) Zeigen Sie, dass Vektoren $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ aus V^* genau dann linear unabhängig sind, wenn $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k$ nicht die Null-Form in $\mathrm{Alt}^k V$ ist.

b) Seien $\{ \varphi_1, \ldots, \varphi_k \}$ sowie $\{ \psi_1, \ldots, \psi_k \}$ linear unabhängige Teilmengen von V^*. Zeigen Sie: Die beiden Teilmengen spannen genau dann denselben (k-dimensionalen) Unterraum von V^* auf, wenn es eine reelle Zahl $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$ gibt mit $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k = \lambda\, \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_k$.