Übungen zur Analysis III, WS 2001/02

Abgabe am Donnerstag, den 31.01.2002 vor der Vorlesung

Aufgabe 37.
Es seien zwei $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\frac{\partial g}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \neq 0$ gegeben.
Zeigen Sie, dass es keine differenzierbare 0-Form $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $dF = f\,dx_1 + g\,dx_2$ geben kann.

Aufgabe 38. *(Geschlossene und exakte k-Formen)*
Sei U eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Eine differenzierbare k-Form ω auf U heißt geschlossen, falls $d\omega = 0$ gilt, und sie heißt exakt, falls es eine differenzierbare $(k-1)$-Form μ auf U gibt, so dass $d\mu = \omega$ gilt.

a) Seien nun eine differenzierbare k-Form ω_1 und eine differenzierbare l-Form ω_2 gegeben. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

   (i) Sind ω_1 und ω_2 geschlossen, dann auch $\omega_1 \wedge \omega_2$.

   (ii) Ist ω_1 geschlossen und ω_2 exakt, so ist $\omega_1 \wedge \omega_2$ exakt.

   (iii) Sind ω_1 und ω_2 exakt, dann auch $\omega_1 \wedge \omega_2$.

b) Seien $f, g \in \mathcal{A}^0(U)$. Finden Sie für die exakte 2-Form $df \wedge dg$ eine „Stammform“, d.h. eine differenzierbare 1-Form ω mit $d\omega = df \wedge dg$.

Aufgabe 39.
Seien U und V offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, $\omega := f\,dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ eine differenzierbare n-Form auf U und $\varphi : V \to U$ eine $\mathcal{C}^\infty$-Abbildung.
Finden Sie die $\mathcal{C}^\infty$-Funktion g mit

$$\varphi^*\omega = g\,dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \ .$$