

Übungen zur Analysis III, WS 2001/02

Abgabe am Donnerstag, den 01.11.2001 vor der Vorlesung

Aufgabe 7. Es sei

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & , \text{ falls } x \in (0, \frac{2}{\pi}] \text{ und } \sin(\frac{1}{x}) \geq 0 , \\ 0 & , \text{ sonst .} \end{cases} \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

- a) $f \in L^+(\mathbb{R}^n)$,
- b) f ist keine Regelfunktion .

Aufgabe 8. (*Stetige Funktionen*)

Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener Quader und $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Beweisen Sie, dass es eine Folge $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $T(\mathbb{R}^n)$ gibt mit

- (i) $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist monoton steigend,
- (ii) $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x) = f(x)$ für alle $x \in Q$,
- (iii) $\left(\int \varphi_k \right)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert.

Dies zeigt, dass die durch 0 fortgesetzte Funktion $\tilde{f}$ in $L^+(\mathbb{R}^n)$ liegt.

(Hinweis: Konstruieren Sie die Folge $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ durch Unterteilung von Q in genügend kleine Teilquader. Dann ist (i) und (iii) leicht zu sehen. Für (ii) nützt ihnen, dass f sogar gleichmäßig stetig ist.)

Aufgabe 9. (*Translationsinvarianz*)

Zeigen Sie, dass das Lebesgue-Integral translationsinvariant ist, d.h.: Sei $f \in L(\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}^n$ und $\tilde{f} : x \mapsto f(x - a)$ die um a „verschobene“ Funktion. Dann ist auch $\tilde{f} \in L(\mathbb{R}^n)$ und es gilt $\int \tilde{f} = \int f$.

(Hinweis: Beweisen Sie die Aussage zunächst für $f \in T(\mathbb{R}^n)$ und $f \in L^+(\mathbb{R}^n)$.)