Übungen zur Analysis III, WS 2001/02

Abgabe am Donnerstag, den 08.11.2001 vor der Vorlesung

Aufgabe 10. *(Unbeschränktheit von Lebesgue-intergierbaren Funktionen)*

a) Zeigen Sie, dass jede Funktion $f \in L^+(\mathbb{R}^n)$ nach unten beschränkt ist.

b) Konstruieren Sie ein $f \in L^+(\mathbb{R}^n)$, das nach oben unbeschränkt ist.

   (Hinweis: Benutzen Sie zur Konstruktion von f z.B. den Satz von Beppo Levi über Folgen von Treppenfunktionen.)

c) Konstruieren Sie ein $f \in L(\mathbb{R}^n)$, das nach oben und unten unbeschränkt ist.

Aufgabe 11.
Es sei $f \in L(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass es Funktionen g und h aus $L^+(\mathbb{R}^n)$ gibt mit

(i) $f(x) = g(x) - h(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$,

(ii) $g(x) \geq 0$ und $h(x) \geq 0$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(Hinweis: Gehen Sie von einer beliebigen Darstellung $f = \widetilde{g} - \widetilde{h}$ aus und subtrahieren Sie von $\widetilde{g}$ und $\widetilde{h}$ eine geeignete Treppenfunktion.)

Aufgabe 12. *(Ausschöpfungslemma)*
Sei eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und eine Folge von Mengen $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegeben mit

$$M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k = \mathbb{R}^n \ .$$

Zeigen Sie: Falls alle „eingeschränkten“ Funktionen $f \cdot \chi_{M_k}$ in $L(\mathbb{R}^n)$ liegen und die Folge der Integrale $(\int |f \cdot \chi_{M_k}|\,)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann liegt auch f in $L(\mathbb{R}^n)$ und es gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int f \cdot \chi_{M_k} = \int f \ .$$

(Hinweis: Benutzen Sie den Konvergenzsatz von Beppo Levi, und gehen Sie zunächst von einer Funktion $f \geq 0$ aus.)