Übungen zur Analysis III, WS 2001/02

Abgabe am Donnerstag, den 15.11.2001 vor der Vorlesung

Aufgabe 13. *(Cantorsches Diskontiuum)*
Es sei $I_0 := [0,1]$, $I_1 := [0,\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},1]$, $I_2 := \Big([0,\frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9},\frac{1}{3}]\Big) \cup \Big([\frac{2}{3},\frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9},1]\Big), \ldots$, das heißt, I_{n+1} entsteht aus I_n indem man aus jedem („maximalen“) Teilintervall von I_n das offene mittlere Drittel entfernt. Die Menge $C := \bigcap_{n\geq 0} I_n$ nennt man Cantorsches Diskontinuum.

Zeigen Sie:

a) C ist kompakt.

b) C ist eine Nullmenge.

c) C ist überabzählbar.

(Hinweis: Für Aufgabenteil c) dürfen Sie ohne Beweis benutzen, dass jede reelle Zahl $x \in [0,1]$ eine („eindeutige“)triadische Entwicklung $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot 3^{-i}$, $x_i \in \{0,1,2\}$ besitzt und dass C genau die Zahlen $x \in [0,1]$ enthält, in deren triadischer Entwicklung die 1 nicht vorkommt ($x_i \neq 1$ für alle $i \in \mathbb{N}$).)

Aufgabe 14.
Es seien $f, g \in L(\mathbb{R}^n)$ und g beschränkt. Zeigen Sie, dass $f \cdot g$ wieder in $L(\mathbb{R}^n)$ liegt. Gehen Sie dabei folgendermaßen vor:

a) Zeigen Sie, dass gilt $\chi_Q \cdot g \in L(\mathbb{R}^n)$, falls $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader ist und $g \in L^+(\mathbb{R}^n)$.

b) Folgern Sie, dass gilt $\varphi \cdot g \in L(\mathbb{R}^n)$, falls $\varphi \in T(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L(\mathbb{R}^n)$.

c) Zeigen Sie, dass gilt $f \cdot g \in L(\mathbb{R}^n)$, falls $f \in L^+(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L(\mathbb{R}^n)$, indem Sie den Satz von der majorisierenden Konvergenz auf eine geeignete Folge aus $L(\mathbb{R}^n)$ anwenden.

d) Folgern Sie die Aussage.

Aufgabe 15.
Sei α eine reelle Zahl und

$$\begin{array}{rcl} f: \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x^\alpha} \end{array} .$$

a) Sei zunächst $\alpha < 1$. Beweisen Sie, dass gilt $f \cdot \chi_{(0,1]} \in L(\mathbb{R}^+)$, und berechnen Sie $\int f \cdot \chi_{(0,1]}$.

b) Sei nun $\alpha > 1$. Beweisen Sie, dass gilt $f \cdot \chi_{[1,+\infty)} \in L(\mathbb{R}^+)$, und berechnen Sie $\int f \cdot \chi_{[1,+\infty)}$.

(Hinweis: Konstruieren Sie geeignete Ausschöpfungen von $(0,1]$, bzw. $[1,+\infty)$ und benutzen Sie dort die Regelintegrierbarkeit von f.)