

Übungen zur Analysis III, WS 2001/02

Abgabe am Donnerstag, den 22.11.2001 vor der Vorlesung

Aufgabe 16. (*Änderung des Volumens bei Streckungen*)

- a) Sei $f \in L(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$ und $\tilde{f} : x \mapsto f(\frac{x}{\lambda})$. Beweisen Sie, dass $\int \tilde{f} = \lambda^n \cdot \int f$.
(Hinweis: Zeigen Sie die Behauptung zunächst für Treppenfunktionen.)
- b) Sei nun $M \subset \mathbb{R}^n$ eine integrierbare Menge, $\lambda \in \mathbb{R}^+$ und $\lambda \cdot M := \{ \lambda \cdot x \mid x \in M \}$ die „um λ gestreckte“ Menge. Zeigen Sie, dass $\text{Vol}(\lambda \cdot M) = \lambda^n \cdot \text{Vol}(M)$.

Aufgabe 17. (*Zerlegungslemma*)

Es seien integrierbare Mengen $M_k \subset \mathbb{R}^n$ gegeben, so dass die Schnittmengen $M_k \cap M_l$ jeweils Nullmengen sind für alle $k \neq l$. Sei weiterhin $U := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

- a) Falls gilt $f \in L(M_k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{M_k} |f|$ konvergent ist, dann folgt $f \in L(U)$ und $\int_U f = \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{M_k} f$.
- b) Falls gilt $f \in L(U)$, dann ist $f \in L(M_k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{M_k} |f|$ konvergent.

Aufgabe 18. (*Eine beschränkte, aber nicht integrierbare Menge*)

- a) Zeigen Sie, dass auf $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \subset \mathbb{R}$ durch $x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$ eine Äquivalenzrelation definiert wird.
- b) Sei $A \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ein Repräsentantensystem für $\sim$ (d.h. A enthält aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element). Sei außerdem $(q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Abzählung von $[-1, 1] \cap \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass die Mengen $A_k := A + q_k = \{ a + q_k \mid a \in A \}$ paarweise disjunkt sind und dass gilt

$$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \subset \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right].$$

- c) Folgern Sie aus b), dass A nicht integrierbar sein kann.

(Hinweis: Mit A müsste auch A_k integrierbar sein und es müsste gelten $\text{Vol}(A) = \text{Vol}(A_k)$.)