Übungen zur Analysis III, WS 2001/02

Abgabe am Donnerstag, den 29.11.2001 vor der Vorlesung

Aufgabe 19.
Zeigen Sie, dass jede offene Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Vereinigung abzählbar vieler kompakter Quader ist, deren Inneres paarweise disjunkt ist.

(Hinweis: Bilden Sie aus Quadern der Form $[\frac{m_1}{2^k}, \frac{m_1+1}{2^k}] \times \ldots \times [\frac{m_n}{2^k}, \frac{m_n+1}{2^k}]$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}$ eine Ausschöfung von M.)

Aufgabe 20.

a) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion mit $f \geq 0$, und sei

$$M := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a \leq x \leq b,\, 0 \leq y \leq f(x) \}$$

die „Fläche unter ihrem Graphen". Der Flächeninhalt von M wurde früher durch $\int_a^b f(x)\,dx$ berechnet. Formulieren und beweisen Sie eine Aussage, die die Konsistenz dieses Integralbegriffes mit dem Begriff „Volumen einer integrierbaren Teilmenge des $\mathbb{R}^2$" sichert.

b) Es sei $D := \{ (x,y) \in [0,1]^2 \,|\, y \geq x^2,\, x \geq y^2 \}$. Zeigen Sie, dass das Integral

$$\int_D (x^2 + y)\, d(x,y)$$

existiert und berechnen Sie den Integralwert.

Aufgabe 21. *(Kegel)*

a) Sei h eine reelle Zahl und B eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^{n-1}$. Die Menge

$$C(B \times \{h\}) := \{ \lambda \cdot (b,h) \,|\, b \in B, 0 \leq \lambda \leq 1 \} \subset \mathbb{R}^n$$

heißt Kegel mit Basis $B \times \{h\}$ und Spitze im Nullpunkt. Zeigen Sie, dass $C(B \times \{h\})$ Lebesgue-integrierbar ist und beweisen Sie

$$\mathrm{Vol}_{\mathbb{R}^n}(C(B \times \{h\})) = \frac{1}{n} \cdot |h| \cdot \mathrm{Vol}_{\mathbb{R}^{n-1}}(B) \ .$$

b) Folgern Sie, dass $\mathrm{Vol}(\{ (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n \mid |x_1| + \ldots + |x_n| \leq 1 \}) = \frac{1}{n!}$.