Übungen zur Analysis III, WS 2001/02

Abgabe am Donnerstag, den 06.12.2001 vor der Vorlesung

Aufgabe 22. *(Torus)*
Es seien zwei positive Zahlen $R_1 > R_2$ gegeben. Die Menge T, die durch Rotation der Menge $R := \{ (0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y - R_1)^2 + z^2 \leq R_2^2 \}$ um die z-Achse entsteht, nemmt man Torus. Berechnen Sie das Volumen von T.

Aufgabe 23.
Sei A eine invertierbare $n \times n$-Matrix. Zeigen Sie

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-||Ax||^2)\, dx = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{|\det(A)|} \ .$$

Aufgabe 24. *(Rotationssymetrische Funktionen)*
Seien zwei reelle Zahlen $0 \leq r_1 < r_2$ und eine Funktion $f : [r_1, r_2] \to \mathbb{R}$ gegeben und sei $K := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid r_1 \leq ||x||_2 \leq r_2 \}$. Die Funktion

$$\begin{aligned} F : K &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(||x||) \end{aligned}$$

ist „rotationssymetrisch“ (der Wert $F(x)$ hängt nur vom Betrag von x ab). Zeigen Sie: Falls F integrierbar ist, dann gilt

$$\int_K F = n \cdot \tau_n \cdot \int_{r_1}^{r_2} f(r) \cdot r^{n-1}\, dr \ ,$$

wobei τ_n das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel ist.

(Hinweis: Transformieren Sie F mittels Kugelkoordinaten des $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} P_n : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi)^{n-2} &\to \mathbb{R}^n \\ (r, \varphi, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-2}) &\mapsto (\sin(\vartheta_{n-2}) \cdot P_{n-1}(r, \varphi, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-3}), r \cdot \cos(\vartheta_{n-2})) \ , \end{aligned}$$

wobei P_2 die ebenen Polarkoordinaten sind.)

Die **Klausur** zur Analysis III findet an folgendem Terminen statt:

Freitag, 08.02.2002, 8:45-10:45 Uhr in HG 116.