Übungen zur Analysis III, WS 2001/02

Abgabe am Donnerstag, den 20.12.2001 vor der Vorlesung

Aufgabe 28. *(Rotationsflächen)*
Seien a und b zwei reelle Zahlen mit $a < b$, $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine nullstellenfreie $\mathcal{C}^1$-Funktion und

$$M := \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \times (a,b) \,|\, x^2 + y^2 = f(z)^2 \} .$$

a) Zeigen Sie, dass M eine zweidimensionale $\mathcal{C}^1$-Mannigfaltigkeit ist.

b) Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \psi : (a,b) \times (0, 2\pi) &\to \mathbb{R}^3 \\ (t, \varphi) &\mapsto (f(t)\cos(\varphi), f(t)\sin(\varphi), t) \end{aligned}$$

eine Parametrisierung einer offenen Teilmenge M_0 vom M ist.

c) Berechnen Sie den zu ψ gehörigen Maßtensor.

d) Zeigen Sie: $\displaystyle\int_{M_0} 1\, dS = 2\pi \cdot \int_a^b f(t)\sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt$.

Aufgabe 29.
Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine zweidimensionale $\mathcal{C}^1$-Mannigfaltigkeit („Fläche") mit globaler Parametrisierung $\psi : T \to M$, wobei T eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ ist. Beweisen Sie: Ist $f : M \to \mathbb{R}$ über M integrierbar, so gilt

$$\int_M f\, dS = \int_T f(\psi(t_1, t_2)) \cdot \left|\left| \frac{\partial \psi}{\partial t_1} \times \frac{\partial \psi}{\partial t_2} \right|\right| \, d(t_1, t_2) .$$

Aufgabe 30.
Auf der Oberfläche einer Halbkugel $K := \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = r^2, x > 0 \}$ mit Radius r sei eine elektische Ladung mit der Ladungsdichte

$$\begin{aligned} \varrho : \quad K &\to \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\mapsto z + 1 \end{aligned}$$

aufgetragen. Berechnen Sie die Gesamtladung $\int_K \varrho\, dS$.