

Klausur zur Analysis III, WS 2001/02
Freitag, den 08.02.2002, **08.45 - 10.45 Uhr**

Name								
Matrikelnummer								
Tutorengruppe								
Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Erreichbare Punkte	10	10	1+4+1+4	10	5+5	3+3+4	4+2+4	70
Erreichte Punkte								

Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt aus und versehen Sie alle Blätter mit Ihrem Namen!

Bearbeiten Sie die Aufgaben auf den ausgegebenen Blättern. Sollte der Platz unter der Aufgabenstellung und auf der Rückseite des Aufgabenblattes nicht ausreichen, so benutzen Sie bitte die leeren Blätter am Ende der Klausur.

Geben Sie die Klausur möglichst nach Aufgaben geordnet und geheftet ab (ein Hefter befindet sich bei der Abgabestelle).

Es sind keinerlei Hilfsmittel zugelassen.

Wir wünschen viel Erfolg!

Aufgaben:

Aufgabe 1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Siehe dort!

Aufgabe 2. Erläutern Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen über eine Menge $N \subset \mathbb{R}^n$. Zitieren Sie dabei genau die jeweils verwendeten Sätze und Definitionen.

- (i) N ist eine Nullmenge.
- (ii) Die charakteristische Funktion χ_N ist fast überall gleich 0.
- (iii) N ist integrierbar und es gilt $\text{Vol}_n(N) = 0$.

Aufgabe 3. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen in $L(I)$, die fast überall gegen eine Funktion f konvergiert. Weiterhin gebe es eine Konstante $M \in \mathbb{R}^+$, so dass für alle $x \in I$ gilt $|f_n(x) - f(x)| \leq M$. Zeigen Sie:

- a) Für alle $x \in I$ gilt $|f(x)| \leq |f_1(x)| + M$.
- b) Die Funktion f ist integrierbar.
- c) Für alle $x \in I$ gilt $|f_n(x)| \leq |f(x)| + M$.
- d) Es gilt $\int_I f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n$.

Aufgabe 4. Seien R_1 und R_2 zwei positive reelle Zahlen mit $R_1 < R_2$ und

$$K := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R_1 < \|(x, y)\| < R_2, y > 0 \} .$$

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\begin{aligned} f : K &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto yx^2 + y^3 \end{aligned}$$

über K integrierbar ist und berechnen Sie $\int_K f$.

Aufgabe 5. Wir betrachten für $R > 0$ die Halbkugel

$$H := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z > 0 \} .$$

Sei M der Teil der Oberfläche von H , der im Inneren des Zylinders

$$Z := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 < \left(\frac{R}{2}\right)^2 \right\}$$

liegt.

- a) Zeigen Sie, dass M eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit ist, indem Sie eine Parametrisierung von M angeben.
- b) Geben Sie eine offene Teilmenge $T \subset \mathbb{R}^2$ und eine integrierbare Abbildung $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ explizit an, so dass gilt

$$\text{Vol}_2(M) = \int_T f(x, y) d(x, y) .$$

(Berechnung des Integralwerts nicht erforderlich.)

Aufgabe 6. Sei $M \subset \mathbb{R}^m$ eine k -dimensionale und $N \subset \mathbb{R}^n$ eine l -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit globalen Parametrisierungen $\varphi : S \rightarrow M$ und $\psi : T \rightarrow N$.

- a) Zeigen Sie, dass $M \times N$ eine $(k + l)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{m+n}$ ist, indem Sie nachweisen, dass die Abbildung

$$\begin{aligned}\varphi \times \psi : S \times T &\rightarrow M \times N \\ (s, t) &\mapsto (\varphi(s), \psi(t))\end{aligned}$$

eine Parametrisierung von $M \times N$ ist.

- b) Beweisen Sie, dass für die Gramschen Determinanten zu $\varphi \times \psi$, φ und ψ gilt:

$$g_{\varphi \times \psi}(s, t) = g_{\varphi}(s) \cdot g_{\psi}(t) .$$

- c) Seien $A \subset M$ und $B \subset N$ integrierbare Teilmengen. Beweisen Sie:

$$\text{Vol}_{k+l}(A \times B) = \text{Vol}_k(A) \cdot \text{Vol}_l(B) .$$

(Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass $A \times B$ integrierbar ist.)

Aufgabe 7. Es sei die 2-Form

$$\omega := x \, dy \wedge dz - y^2 \, dx \wedge dz + (y + z) \, dx \wedge dy$$

auf $\mathbb{R}^3$ gegeben, und sei

$$X := \{ (x, y, z) \in (0, 1) \times \mathbb{R} \times (0, 2) \mid y = x^2 \} .$$

- a) Zeigen Sie, dass ω nicht geschlossen ist, d.h. $d\omega \neq 0$, und dass ω nicht exakt ist, d.h. es gibt keine 1-Form η mit $\omega = d\eta$.
- b) Begründen Sie kurz, dass X eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit ist.
- c) Berechnen Sie $\int_X \omega$.

Aufgabe 1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. **Kreuzen Sie die entsprechende Antwort an.** Es werden **keine** Begründungen verlangt. Jede richtig beantwortete Teilaufgabe bringt einen Punkt, jede falsch beantwortete Teilaufgabe ergibt einen Punkt Abzug. Nicht beantwortete Teile werden nicht gewertet.

1. Jede Nullmenge im $\mathbb{R}^n$ kann durch endlich viele disjunkte Quader überdeckt werden, so dass die Summe über die Volumina dieser Quader kleiner bleibt als eine beliebig vorgegebene positive Konstante. richtig ☐ falsch ☐
2. Jede Treppenfunktion $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 2$, besitzt nur abzählbar viele Unstetigkeitsstellen. richtig ☐ falsch ☐
3. Jede Lebesgue-integrierbare Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist Regelfunktion. richtig ☐ falsch ☐
4. Jede stetige Funktion $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ist Lebesgue-integrierbar. richtig ☐ falsch ☐
5. Jede offene und beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist Lebesgue-integrierbar. richtig ☐ falsch ☐
6. Das Bild einer Nullmenge unter einer $\mathcal{C}^1$ -Abbildung ist wieder Nullmenge. richtig ☐ falsch ☐
7. Grenzwertbildung und Lebesgue-Integration ist vertauschbar, d.h.: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung, so dass $f(u, \cdot) \in L(\mathbb{R}^n)$ für alle $u \in U$. Dann gilt für alle $a \in U$: $\lim_{u \rightarrow a} \int_{\mathbb{R}^n} f(u, x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{u \rightarrow a} f(u, x) dx$. richtig ☐ falsch ☐
8. Der Graph einer $\mathcal{C}^1$ -Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$. richtig ☐ falsch ☐
9. Das Bild einer $\mathcal{C}^1$ -Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. richtig ☐ falsch ☐
10. Für alternierende Multilinearformen $\omega \in \text{Alt}^2(\mathbb{R}^n)$ und $\eta \in \text{Alt}^3(\mathbb{R}^n)$ gilt $\omega \wedge \eta = \eta \wedge \omega$. richtig ☐ falsch ☐

Aufgabe 2. Erläutern Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen über eine Menge $N \subset \mathbb{R}^n$. Zitieren Sie dabei genau die jeweils verwendeten Sätze und Definitionen.

- (i) N ist eine Nullmenge.
- (ii) Die charakteristische Funktion χ_N ist fast überall gleich 0.
- (iii) N ist integrierbar und es gilt $\text{Vol}_n(N) = 0$.

Aufgabe 3. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen in $L(I)$, die fast überall gegen eine Funktion f konvergiert. Weiterhin gebe es eine Konstante $M \in \mathbb{R}^+$, so dass für alle $x \in I$ gilt $|f_n(x) - f(x)| \leq M$. Zeigen Sie:

a) Für alle $x \in I$ gilt $|f(x)| \leq |f_1(x)| + M$.

b) Die Funktion f ist integrierbar.

c) Für alle $x \in I$ gilt $|f_n(x)| \leq |f(x)| + M$.

d) Es gilt $\int_I f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n$.

Aufgabe 4. Seien R_1 und R_2 zwei positive reelle Zahlen mit $R_1 < R_2$ und

$$K := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R_1 < \|(x, y)\| < R_2, y > 0 \} .$$

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\begin{aligned} f : K &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto yx^2 + y^3 \end{aligned}$$

über K integrierbar ist und berechnen Sie $\int_K f$.

Aufgabe 5. Wir betrachten für $R > 0$ die Halbkugel

$$H := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z > 0 \} .$$

Sei M der Teil der Oberfläche von H , der im Inneren des Zylinders

$$Z := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(x - \frac{R}{2} \right)^2 + y^2 < \left(\frac{R}{2} \right)^2 \right\}$$

liegt.

- a) Zeigen Sie, dass M eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit ist, indem Sie eine Parametrisierung von M angeben.
- b) Geben Sie eine offene Teilmenge $T \subset \mathbb{R}^2$ und eine integrierbare Abbildung $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ explizit an, so dass gilt

$$\text{Vol}_2(M) = \int_T f(x, y) d(x, y) .$$

(Berechnung des Integralwerts nicht erforderlich.)

Aufgabe 6. Sei $M \subset \mathbb{R}^m$ eine k -dimensionale und $N \subset \mathbb{R}^n$ eine l -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit globalen Parametrisierungen $\varphi : S \rightarrow M$ und $\psi : T \rightarrow N$.

- a) Zeigen Sie, dass $M \times N$ eine $(k + l)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{m+n}$ ist, indem Sie nachweisen, dass die Abbildung

$$\begin{aligned}\varphi \times \psi : S \times T &\rightarrow M \times N \\ (s, t) &\mapsto (\varphi(s), \psi(t))\end{aligned}$$

eine Parametrisierung von $M \times N$ ist.

- b) Beweisen Sie, dass für die Gramschen Determinanten zu $\varphi \times \psi$, φ und ψ gilt:

$$g_{\varphi \times \psi}(s, t) = g_{\varphi}(s) \cdot g_{\psi}(t) .$$

- c) Seien $A \subset M$ und $B \subset N$ integrierbare Teilmengen. Beweisen Sie:

$$\text{Vol}_{k+l}(A \times B) = \text{Vol}_k(A) \cdot \text{Vol}_l(B) .$$

(Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass $A \times B$ integrierbar ist.)

Aufgabe 7. Es sei die 2-Form

$$\omega := x \, dy \wedge dz - y^2 \, dx \wedge dz + (y + z) \, dx \wedge dy$$

auf $\mathbb{R}^3$ gegeben, und sei

$$X := \{ (x, y, z) \in (0, 1) \times \mathbb{R} \times (0, 2) \mid y = x^2 \} \, .$$

- a) Zeigen Sie, dass ω nicht geschlossen ist, d.h. $d\omega \neq 0$, und dass ω nicht exakt ist, d.h. es gibt keine 1-Form η mit $\omega = d\eta$.
- b) Begründen Sie kurz, dass X eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit ist.
- c) Berechnen Sie $\int_X \omega$.

Zusatz zu Aufgabe ...

Zusatz zu Aufgabe ...

Zusatz zu Aufgabe ...

Zusatz zu Aufgabe ...