Übungen zur Funktionentheorie I, SS 2004

Abgabe am Montag, den 26.04.2004 **bis 11:10 Uhr** vor der Vorlesung

Aufgabe 1. *(Funktionenreihen und -folgen in $\mathbb{C}$)*

a) Zeigen Sie, dass die Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(z+k)^2}$ auf $\{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0 \}$ gleichmäßig konvergiert.

b) Wir betrachten die Funktionen $f_n(z) = z^n$.

(i) Bestimmen Sie die größte Menge $D \subset \mathbb{C}$, auf der die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise konvergiert.

(ii) Konvergiert die Folge gleichmäßig auf D?

(iii) Konvergiert die Folge lokal gleichmäßig auf D?

(iv) Konvergiert die Folge (lokal) gleichmäßig auf dem Inneren von D?

Aufgabe 2. *(Topologie in $\mathbb{C}$)*

Untersuchen Sie die folgenden Mengen auf die Eigenschaften offen, abgeschlossen, kompakt, zusammenhängend:

a) $M_1 = \mathbb{C} \setminus \{ 0 \}$,

b) $M_2 = \mathbb{C} \setminus \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = \mathrm{Re}(z) \}$,

c) $M_3 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - 4i| \leq 2 \} \cup \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - 3| \leq 3 \}$,

d) $M_4 = \{ \exp(ix) := \cos(x) + i \sin(x) \mid x \in \mathbb{R} \}$.

Aufgabe 3. *(Wiederholung Analysis)*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Jede richtig beantwortete Teilaufgabe bringt einen halben Punkt, jede falsch beantwortete Teilaufgabe ergibt einen halben Punkt Abzug. Nicht beantwortete Teile werden nicht gewertet.

1. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine stetige Abbildung und $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge. Dann ist auch $f(U) \subset \mathbb{C}$ offen. *richtig* ☐ *falsch* ☐
2. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine stetige Abbildung und $U \subset \mathbb{C}$ eine zusammenhängende Menge. Dann ist auch $f(U) \subset \mathbb{C}$ zusammenhängend. *richtig* ☐ *falsch* ☐
3. Jede quadratische Gleichung $az^2 + bz + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{C}$ lässt sich durch quadratische Ergänzung in die Form $z'^2 = C$ mit $C \in \mathbb{C}$ bringen. *richtig* ☐ *falsch* ☐
4. Jede Gleichung der Form $z'^2 = C$ mit $C \in \mathbb{C}$ besitzt eine (effektiv berechenbare) Lösung $z' \in \mathbb{C}$. *richtig* ☐ *falsch* ☐
5. Eine Potenzreihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ konvergiert innerhalb ihres Konvergenzradius lokal gleichmäßig. *richtig* ☐ *falsch* ☐
6. Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann ist auch die Grenzfunktion stetig. *richtig* ☐ *falsch* ☐
7. Für jede integrierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ gilt: $\inf \{ f(x) \mid x \in [a, b] \} \cdot (b - a) \leq \int_a^b f \leq ||f||_{[a,b]} \cdot (b - a)$. *richtig* ☐ *falsch* ☐
8. Die Bogenlänge einer differenzierbaren Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ berechnet sich durch: $L(\gamma) = \int_a^b ||\gamma'||_2$. *richtig* ☐ *falsch* ☐