Übungen zur Funktionentheorie I, SS 2004

Abgabe am Montag, den 03.05.2004 **bis 11:10 Uhr** vor der Vorlesung

Aufgabe 4. *(Wirtinger Ableitungen)*

Sei D eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ und $f : D \to \mathbb{C}$ reell partiell differenzierbar. Wir definieren

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) .$$

a) Zeigen Sie: Falls f in $z_0 \in \mathbb{C}$ holomorph ist, so gilt $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = f'(z_0)$.

b) Zeigen Sie, dass f genau dann holomorph ist, wenn f reell total differenzierbar ist und $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass f genau dann antiholomorph ist, wenn f reell total differenzierbar ist und $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ gilt.

d) Sei $f(z) = z^2\overline{z}^3$. Berechnen Sie $\frac{\partial f}{\partial z}$ und $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$.

Aufgabe 5. *(Harmonische Funktionen)*

Sei D eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$. Der *Laplace-Operator* Δ ordnet einer zweimal reell stetig differenzierbaren Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ die Funktion $\Delta f := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$ zu.

a) Eine Funktion f heißt *harmonisch*, falls gilt $\Delta f = 0$. Zeigen Sie, dass jede holomorphe (und zweimal reell stetig differenzierbare) Funktion harmonisch ist.

b) Sei f eine holomorphe (und zweimal reell stetig differenzierbare) Funktion. Zeigen Sie

$$\Delta |f|^2 = 4|f'|^2 .$$

Aufgabe 6. *(Holomorphe Funktionen)*

Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Zeigen Sie, dass f genau dann konstant ist, wenn eine der folgenden Bedingungen gilt:

a) $f'(z) = 0$ für alle $z \in D$,

b) $\mathrm{Re} f$ ist konstant,

c) $\mathrm{Im} f$ ist konstant,

d) $|f|$ ist konstant,

e) f ist holomorph und antiholomorph.