## Übungen zur Funktionentheorie I, SS 2004

Abgabe am Montag, den 17.05.2004 **bis 11:15 Uhr** vor der Vorlesung

**Aufgabe 10.** *(Cauchyscher Integralsatz)*
Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, $p \in U$ eine komplexe Zahl und $f : U \setminus \{ p \} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Weiterhin sei $\Delta \subset U$ ein Dreieck mit $p \in \overset{\circ}{\Delta}$ und $B \subset U$ eine Kreisscheibe mit $p \in \overset{\circ}{B}$. Zeigen Sie:

$$\int_{\partial\Delta} f = \int_{\partial B} f \ .$$

**Aufgabe 11.** *(Cauchysche Integralformel)*
Es sei $p$ eine komplexe Zahl mit $|p-1| \neq 1$ und $|p+1| \neq 1$. Bestimmen Sie mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes und der Cauchyschen Integralformel den Wert des Integrals

$$\int_{\partial B_1(p)} \frac{1}{z^2-1}\, dz \ .$$

**Aufgabe 12.** *(Konvergenzradius von Potenzreihen)*

a) Sei eine Folge komplexer Zahlen $a_n \neq 0$ gegeben. Beweisen Sie das folgende Kriterium für den Konvergenzradius $R$ der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$:
Falls der Limes $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \in \mathbb{R} \cup \{ \infty \}$ existiert, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \begin{cases} 0 & \text{, falls } R = \infty \\ \infty & \text{, falls } R = 0 \\ \frac{1}{R} & \text{, sonst} \end{cases} .$$

(Hinweis: Quotientenkriterium.)

b) Seien $a$ und $b$ reelle Zahlen mit $0 < a \leq b$. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$ ,

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \quad \text{mit} \quad a_n := \begin{cases} a^n & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ b^n & \text{falls } n \text{ ungerade .} \end{cases}$