Übungen zur Funktionentheorie I, SS 2004

Abgabe am **Donnerstag, den 27.05.2004** vor der Vorlesung

Aufgabe 14. *(Potenzreihenentwicklung)*

a) Geben Sie jeweils ein Beispiel für eine Potenzreihe mit endlichem Konvergenzradius an, welche

  (i) auf dem ganzen Rand des Konvergenzkreises konvergiert,

  (ii) auf keinem Punkt des Rands des Konvergenzkreises konvergiert,

  (iii) in wenigstens einem Punkt des Rands des Konvergenzkreises konvergiert, in einem anderen aber divergiert.

b) Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen f die Taylorreihe zum Entwicklungspunkt $a \in \mathbb{C}$ sowie deren Konvergenzradius

  (i) $f = \frac{1}{z}$ und $a = 1$,

  (ii) $f = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ und $a = 0$.

  (Hinweis: Bestimmen Sie eine *Partialbruchzerlegung* $\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2}$.)

Aufgabe 15. *(Satz von Morera)*
Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, die holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ist. Zeigen Sie, dass f holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ ist.

Aufgabe 16. *(Folgerungen aus dem CIS)*

a) Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, zu der es positive reelle Zahlen R und M sowie eine natürliche Zahl n gibt, so dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$ gilt:

$$|f(z)| \leq M|z|^n \ .$$

Zeigen Sie, dass f ein Polynom mit $\deg f \leq n$ ist.

(Hinweis: Benutzen Sie die Cauchy-Ungleichung ähnlich wie im Beweis des Satzes von Liouville.)

b) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und w_1, w_2 komplexe Zahlen, die linear unabhängig über $\mathbb{R}$ sind. Für alle $z \in \mathbb{C}$ und $i = 1, 2$ gelte

$$f(z + w_i) = f(z) \ .$$

Zeigen Sie, dass f konstant ist.

(Hinweis: Betrachten Sie f auf dem Bereich $\mathfrak{F} := \{ \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in \mathbb{C} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1] \}$.)