Übungen zur Funktionentheorie I, SS 2004

Abgabe am **Montag, den 07.06.2004** vor der Vorlesung

Aufgabe 17. *(Identitätssatz I)*
Es seien $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen, so dass für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$|f(z)| \leq |g(z)| \ .$$

Zeigen Sie, dass eine komplexe Zahl λ existiert mit $f = \lambda g$.

Aufgabe 18. *(Identitätssatz II)*
Es sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Zu jedem Punkt $p \in U$ gebe es in der Potenzreihenentwicklung von f um p mindestens einen Koeffizienten, der Null ist. Beweisen Sie, dass f ein Polynom ist.

(Hinweis: Betrachten Sie für ein nichtleeres Kompaktum $K \subset U$ die Mengen $N_n := \left\{ z \in K \mid f^{(n)}(z) = 0 \right\}$.)

Aufgabe 19. *(Regel von De L'Hospital)*
Seien $f, g : D \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen, die in einem Punkt $p \in D$ dieselbe Nullstellenordnung $k \neq \infty$ besitzen. Beweisen Sie:

$$\lim_{z \to p} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(k)}(p)}{g^{(k)}(p)} \ .$$

Aufgabe 20. *(Betragsmaxima)*
Bestimmen Sie jeweils das Maximum von $|f|$ auf $\overline{\mathbb{E}} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1 \}$.

a) $f(z) = \frac{z+3}{z-3}$,

b) $f(z) = z^2 + z - 1$,

c) $f(z) = 3 - |z|^2$.

Im letzten Beispiel liegt das Bertagsmaximum im Inneren von $\mathbb{E}$. Ist das ein Widerspruch zum Maximumsprinzip?