

Übungen zur Funktionentheorie I, SS 2004

Abgabe am Montag, den 14.06.2004 vor der Vorlesung

Aufgabe 21. (Elementare Funktionen I)

- a) Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$?
- b) Bestimmen Sie von den folgenden Funktionen alle Nullstellen sowie deren Nullstellenordnung.
- (i) $\cosh : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \cosh(z)$,
- (ii) $\cos - \sin : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \cos(z) - \sin(z)$.

Aufgabe 22. (Elementare Funktionen II)

Es sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto e^{2\pi it}$ und $n > 0$ eine natürliche Zahl. Berechnen Sie die Integrale:

- a) $\int_{\gamma} \frac{\sin(z)}{z^n} dz$,
- b) $\int_{\gamma} \frac{\sinh(z)}{z^n} dz$.

(Hinweis: Nutzen Sie, dass Potenzreihen auf Kompakta innerhalb des Konvergenzradius gleichmäßig konvergieren.)

Aufgabe 23. (Umlaufzahlen)

Skizzieren Sie die folgenden Wege $\gamma_i, i = 1, 2$ und berechnen Sie die Umlaufzahlen in den Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus \text{Bild}(\gamma_i)$.

- a) $\gamma_1 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto 2 \cos(2t)e^{it}$,
- b) $\gamma_2 : [0, 3] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto \begin{cases} 2(1-t)e^{2\pi it} & \text{falls } t \in [0, 1] \\ e^{-\pi i(t-1)} - 1 & \text{falls } t \in [1, 2] \\ 4t - 10 & \text{falls } t \in [2, 3] \end{cases}$.