Übungen zur Funktionentheorie I, SS 2004

Abgabe am **Montag, den 21.06.2004** vor der Vorlesung

Aufgabe 24. *(Umlaufzahlen)*

a) Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ ein geschlossener Weg, m eine natürliche Zahl und $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^m$. Zeigen Sie
$$n(g \circ \gamma, 0) = m \cdot n(\gamma, 0) \ .$$

b) Es seien $D, D' \subset \mathbb{C}$ Gebiete und $f : D \to D'$ eine biholomorphe Abbildung. Weiterhin sei $c \in D$ und $\gamma : [0,1] \to D$ ein geschlossener Weg mit $c \notin \text{Bild}\gamma$ und $\text{Int}\gamma \subset D$. Zeigen Sie
$$n(f \circ \gamma, f(c)) = n(\gamma, c) \ .$$

(Hinweis: Benutzen Sie die Umlaufversion der CIF für die Abbildung
$$h : z \mapsto \begin{cases} f'(z)\frac{z-c}{f(z)-f(c)} & \text{falls } z \in D \setminus \{ c \} \\ 1 & \text{falls } z = c \end{cases} \ .)$$

Aufgabe 25. *(Fundamentalgruppe)*
Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $p \in D$ und M die Menge aller geschlossenen Wege in D mit Anfangspunkt p. Zwei Wege $\gamma_1, \gamma_2 \in M$ seinen äquivalent ($\gamma_1 \sim \gamma_2$), wenn sie homotop zueinander sind. Zeigen Sie, dass durch
$$[\gamma_1] + [\gamma_2] := [\gamma_1 \gamma_2]$$
eine Gruppenopperation auf der Menge der Homotopieklassen $M/\sim$ definiert wird. Die Gruppe
$$\pi_1(D, p) := M/\sim$$
nennt man *Fundamentalgruppe* von D mit *Basispunkt* p.

Aufgabe 26. *(Fundamentalgruppe von $\mathbb{C} \setminus \{ 0 \}$)*
Zeigen Sie, dass durch die Umlaufzahl ein Isomophismus
$$\begin{array}{rcl} \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{ 0 \}, 1) & \to & \mathbb{Z} \\ [\gamma] & \mapsto & n(\gamma, 0) \end{array}$$
gegeben ist.