

Übungen zur Funktionentheorie I, SS 2004

Abgabe am Montag, den 28.06.2004 vor der Vorlesung

Aufgabe 27. (Holomorphe Wurzeln)

Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Zeigen Sie:

- Falls h eine holomorphe n -te Wurzel aus der konstanten Funktion $1 : D \rightarrow \mathbb{C}$ ist, so ist h die konstante Funktion $e^{k \frac{2\pi i}{n}}$ für ein $k \in \{1, \dots, n\}$.
- Falls f eine holomorphe n -te Wurzel besitzt, dann besitzt f genau n verschiedene n -te Wurzeln.

(Hinweis: Betrachten Sie $\frac{\tilde{h}}{h}$ für zwei unterschiedliche n -te Wurzeln \tilde{h} und h .)

Aufgabe 28. (Typen isolierter Singularitäten I)

- Eine holomorphe Funktion $f \not\equiv 0$ besitze in p eine Nullstelle der Ordnung m . Zeigen Sie, dass $\frac{1}{f}$ einen Pol der Ordnung m in p hat.
- Eine holomorphe Funktion $f : D \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$ besitze im Punkt p einen Pol der Ordnung $m \geq 1$. Zeigen Sie, dass $\frac{1}{f}$ eine hebbare Singularität in p besitzt und dass die holomorphe Fortsetzung von $\frac{1}{f}$ eine Nullstelle der Ordnung m in p hat.
- Zeigen Sie: Eine Funktion f hat genau dann eine wesentliche isolierte Singularität im Punkt p , wenn auch $\frac{1}{f}$ eine wesentliche isolierte Singularität im Punkt p hat.

Aufgabe 29. (Typen isolierter Singularitäten II)

Bestimmen Sie die isolierten Singularitäten der folgenden Funktionen. Falls eine hebbare Singularität vorliegt, so bestimmen Sie eine holomorphe Fortsetzung. Falls ein Pol vorliegt, so bestimmen Sie die Polstellenordnung.

- $f_1(z) = \frac{\sin(z)}{z}$,
- $f_2(z) = \frac{\cos(z)}{z}$,
- $f_3(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$,
- $f_4(z) = e^{\frac{1}{\sin(z)}}$.

(Hinweis: Man kann nachweisen, dass eine wesentliche Singularität in p vorliegt, indem man Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightsquigarrow p$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightsquigarrow p$ angibt mit $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$.)