Übungen zur Funktionentheorie I, SS 2004

Abgabe am **Montag, den 28.06.2004** vor der Vorlesung

Aufgabe 27. *(Holomorphe Wurzeln)*
Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Zeigen Sie:

a) Falls h eine holomorphe n-te Wurzel aus der konstanten Funktion $1 : D \to \mathbb{C}$ ist, so ist h die konstante Funktion $e^{k\frac{2\pi i}{n}}$ für ein $k \in \{1, \ldots, n\}$.

b) Falls f eine holomorphe n-te Wurzel besitzt, dann besitzt f genau n verschiedene n-te Wurzeln.

(Hinweis: Betrachten Sie $\frac{\widetilde{h}}{h}$ für zwei unterschiedliche n-te Wurzeln $\widetilde{h}$ und h.)

Aufgabe 28. *(Typen isolierter Singularitäten I)*

a) Eine holomorphe Funktion $f \not\equiv 0$ besitze in p eine Nullstelle der Ordnung m. Zeigen Sie, dass $\frac{1}{f}$ einen Pol der Ordnung m in p hat.

b) Eine holomorphe Funktion $f : D \setminus \{p\} \to \mathbb{C}$ besitze im Punkt p einen Pol der Ordnung $m \geq 1$. Zeigen Sie, dass $\frac{1}{f}$ eine hebbare Singularität in p besitzt und dass die holomorphe Fortsetztung von $\frac{1}{f}$ eine Nullstelle der Ordnung m in p hat.

c) Zeigen Sie: Eine Funktion f hat genau dann eine wesentliche isolierte Singularität im Punkt p, wenn auch $\frac{1}{f}$ eine wesentliche isolierte Singularität im Punkt p hat.

Aufgabe 29. *(Typen isolierter Singularitäten II)*
Bestimmen Sie die isolierten Singularitäten der folgenden Funktionen. Falls eine hebbare Singularität vorliegt, so bestimmen Sie eine holomorphe Fortsetzung. Falls ein Pol vorliegt, so bestimmen Sie die Polstellenordnung.

a) $f_1(z) = \frac{\sin(z)}{z}$,

b) $f_2(z) = \frac{\cos(z)}{z}$,

c) $f_3(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$,

d) $f_4(z) = e^{\frac{1}{\sin(z)}}$.

(Hinweis: Man kann nachweisen, dass eine wesentliche Singularität in p vorliegt, indem man Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \rightsquigarrow p$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \rightsquigarrow p$ angibt mit $\lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(b_n)$.)