Übungen zur Funktionentheorie I, SS 2004

Abgabe am **Montag, den 05.07.2004** vor der Vorlesung

Aufgabe 30. *(Laurent-Entwicklung)*
Bestimmen Sie die Laurent-Entwicklung der Funktion

$$f(z) = \frac{z^2 - 6}{z^2 + 5z + 6}$$

für folgende Kreisringe:

a) $B_2(0)$,

b) $B_{2,3}(0)$,

c) $B_{3,\infty}(0)$.

Aufgabe 31. *(Abschätzung für die Laurent-Koeffizienten)*
Es sei f eine holomorphe Funktion auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ mit einer isolierten Singularität im Punkt p. Sei nun $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-p)^n$ die zugehörige Laurent-Reihe.

a) Beweisen Sie die folgende Abschätzung für die Laurent-Koeefizienten:

$$|a_n| \leq \frac{||f||_{\partial B_r(p)}}{r^n}$$

für jedes $r > 0$ mit $B_r(p) \setminus \{ p \} \subset U$.

b) Nutzen Sie a), um einen alternativen Beweis des Riemannschen Hebbarkeitssatzes zu geben.

Aufgabe 32. *(Residuensatz)*
Es sei $\gamma : [0,3] \to \mathbb{C}$

$$t \mapsto \begin{cases} 2(1-t)e^{2\pi i t} & \text{falls} \quad t \in [0,1] \\ e^{-\pi i(t-1)} - 1 & \text{falls} \quad t \in [1,2] \\ 4t - 10 & \text{falls} \quad t \in [2,3] \end{cases}$$

der Weg aus Aufgabe 23 b). Berechnen Sie

$$\int_\gamma \frac{e^z}{(z^2 + \frac{i}{2}z - \frac{1}{16})(z + \frac{1}{2} + \frac{i}{4})(z + 1 + \frac{i}{4})}\, dz \; .$$