Übungen zur Funktionentheorie I, SS 2004

Abgabe am **Montag, den 19.07.2004** vor der Vorlesung

Aufgabe 37. *(Möbiustransformationen)*

a) Zeigen Sie, dass Geraden und Kreise in der komplexen Zahlenebene genau die Punktmengen sind, die durch Gleichungen der Form

$$\alpha z\overline{z} + \overline{c}z + c\overline{z} + \beta = 0$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{C}$ und $c\overline{c} - \alpha\beta > 0$ beschrieben werden.

b) Es sei f eine Möbiustransformation und $M \subset \overline{\mathbb{C}}$ ein Kreis oder eine Gerade. (Vereinbarung: Alle Geraden enthalten den Punkt ∞.) Zeigen, dass $f(M)$ ebenfalls ein Kreis oder eine Gerade ist.

(Hinweis: Zeigen Sie die Aussage zunächst für $z \mapsto az$, $z \mapsto z + b$ und $z \mapsto \frac{1}{z}$ mit $a \in \mathbb{C}^*$ und $b \in \mathbb{C}$.)

Aufgabe 38. *(Doppelverhältnis)*
Zeigen Sie, dass das Doppelverhältnis $\mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4)$ von vier paarweise verschiedenen Punkten in $\mathbb{C}$ genau dann reell ist, wenn die Punkte auf einer gemeinsamen Geraden oder einem gemeinsamen Kreis liegen.

Aufgabe 39. *(Automorphismen der oberen Halbebene)*
Zeigen Sie

a)
$$\mathrm{Aut}(\mathbb{E}) = \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{\overline{b}z + \overline{a}} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{C}\,,\ |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\} .$$

(Hinweis: Mit der Notation der Vorlesung wählen Sie: $a^2 := \frac{e^{i\varphi}}{1-|p|^2}$, $b := -pa$.)

b)
$$\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) = \left\{ z \mapsto \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \;\middle|\; \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \right\} .$$

Die **Klausur** zur Funktionentheorie findet an folgendem Termin statt: Donnerstag, 22.07.2004 um 9:00 Uhr (s.t.) im HG 6.