Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps Universität Marburg
Prof. Dr. Th. Bauer, Chr. Schulz

Sommersemester 2004

Klausur zur Funktionentheorie I, SS 2004
Donnerstag, den 22.07.2002, **09.15 - 11.15 Uhr**

Name								
Matrikelnummer								
Tutorengruppe								
Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Erreichbare Punkte	10	10	10	$5+5$	$6+4$	$3+3+4$	10	70
Erreichte Punkte								

Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt aus und versehen Sie <u>alle</u> Blätter mit Ihrem Namen!
Bearbeiten Sie die Aufgaben auf den ausgegebenen Blättern. Sollte der Platz unter der Aufgabenstellung und auf der Rückseite des Aufgabenblattes nicht ausreichen, so benutzen Sie bitte die leeren Blätter am Ende der Klausur.
Geben Sie die Klausur möglichst nach Aufgaben geordnet und geheftet ab (ein Hefter befindet sich bei der Abgabestelle).
Es sind <u>keinerlei Hilfsmittel</u> zugelassen.

Wir wünschen viel Erfolg!

Aufgaben:

Aufgabe 1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Siehe dort!

Aufgabe 2. Es seien D ein Gebiet und $f, g : D \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen mit $\operatorname{Re}(f) = \operatorname{Re}(g)$. Zeigen Sie, dass sich die Imaginärteile $\operatorname{Im}(f)$ und $\operatorname{Im}(g)$ nur um eine Konstante unterscheiden.

Aufgabe 3. Seien $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{C}$ vier paarweise verschiedene Punkte. Den Streckenzug von p_1 über p_2, p_3 und p_4 zurück nach p_1 nennen wir einen Vierecksweg. Zeigen Sie:
Eine stetige Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist genau dann holomorph, wenn für alle Viereckswege $\Diamond \subset \mathbb{C}$ gilt:

$$\int_{\Diamond} f = 0 \; .$$

Aufgabe 4.

a) Sei $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Abbildung mit unendlich vielen Nullstellen in der Menge

$$E := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| \leq \frac{1}{2} \right\} \; .$$

Zeigen Sie $f \equiv 0$.

b) Es sei $M > 0$ und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Abbildung mit $\operatorname{Re}(f(z)) > M$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

(Hinweis: Betrachten Sie $\frac{1}{|f|}$.)

Aufgabe 5. Wir definieren

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & \begin{cases} \frac{z-1}{\exp(2\pi i z)-1} & \text{falls } z \notin \mathbb{Z}, \\ a & \text{falls } z \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{array}$$

a) Bestimmen Sie ein $a \in \mathbb{C}$, so dass f im Punkt $z = 1$ komplex differenzierbar ist.

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihenentwicklung von f um 1.

Aufgabe 6. Wir definieren die Wege $\gamma_i : [0, 1] \to \mathbb{C}$, $i = 1, 2, 3$ wie folgt:

$$\gamma_1(t) := 2e^{4\pi i t} \;, \quad \gamma_2(t) := 2 - t \;, \quad \gamma_3(t) := 2e^{-2\pi i t} - 1 \; .$$

a) Skizzieren Sie den zusammengesetzten Weg $\gamma := \gamma_1\gamma_2\gamma_3(\gamma_2)^{-1}$ und geben Sie für die Zusammenhangskomponenten von $\operatorname{Int}(\gamma)$ die Umlaufzahlen an.

b) Berechnen Sie

$$\int_\gamma \frac{1}{z^4 + 4z^3 + 5z^2} \, dz \; .$$

c) Berechnen Sie das reelle Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin(t)}{4 - 2\cos(t)} \, dt \; .$$

Aufgabe 7. Geben Sie explizit eine Möbiustransformation an, die die rechte Halbebene

$$H := \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0 \}$$

auf die Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$ abbildet.

Aufgabe 1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. **Kreuzen Sie die entsprechende Antwort an.** Es werden **keine** Begründungen verlangt. Jede richtig beantwortete Teilaufgabe bringt einen Punkt, jede falsch beantwortete Teilaufgabe ergibt einen Punkt Abzug. Nicht beantwortete Teile werden nicht gewertet.

1. Wenn die Schnittmenge $\bigcap_{i\in I} D_i$ von beliebig vielen Gebieten D_i nicht leer ist, so ist sie wieder ein Gebiet.
   richtig ☐ *falsch* ☐

2. Eine winkeltreue reell total differenzierbare Funktion ist holomorph oder antiholomorph.
   richtig ☐ *falsch* ☐

3. Ist γ ein Integrationsweg und f stetig, dann gilt $\mathrm{Re}\left(\int_\gamma f\right) = \int_\gamma \mathrm{Re}(f)$.
   richtig ☐ *falsch* ☐

4. Für alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ gilt $|e^{iz}| \leq |\sin(z)| + |\cos(z)|$.
   richtig ☐ *falsch* ☐

5. Das Innere eines Zykels ist offen und beschränkt.
   richtig ☐ *falsch* ☐

6. Für jede biholomorphe Abbildung $f : D \to D'$ gilt $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in D$.
   richtig ☐ *falsch* ☐

7. Auf der Menge
   $$\mathbb{C} \setminus \Big(\{\, z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) \leq 0, \mathrm{Im}(z) = 0 \,\} \cup \{\, z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) = 0, |\mathrm{Im}(z)| \geq 1 \,\} \Big)$$
   exisitiert eine holomorphe Logarithmusfunktion.
   richtig ☐ *falsch* ☐

8. Sei D ein Gebiet. Wenn zwei auf D holomorphe Funktionen in einem Punkt $p \in D$ dieselben Taylorkoeffizienten besitzen, dann stimmen die Funktionen auf ganz D überein.
   richtig ☐ *falsch* ☐

9. Sei $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - p)^n$ die Laurent-Entwicklung einer rationalen Funktion im Kreisring $B_{1,2}(p)$. Dann bricht entweder der Haupt- oder der Nebenteil ab, d.h. es existiert ein $M \in \mathbb{Z}$, so dass entweder $a_n = 0$ für alle $n < M$ oder $a_n = 0$ für alle $n > M$.
   richtig ☐ *falsch* ☐

10. Jedes Gebiet in $\mathbb{C}$ läßt sich biholomorph auf die Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$ abbilden.
    richtig ☐ *falsch* ☐

Aufgabe 2. Es seien D ein Gebiet und $f, g : D \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen mit $\mathrm{Re}(f) = \mathrm{Re}(g)$. Zeigen Sie, dass sich die Imaginärteile $\mathrm{Im}(f)$ und $\mathrm{Im}(g)$ nur um eine Konstante unterscheiden.

Aufgabe 3. Seien $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{C}$ vier paarweise verschiedene Punkte. Den Streckenzug von p_1 über p_2, p_3 und p_4 zurück nach p_1 nennen wir einen Viereckswеg. Zeigen Sie:
Eine stetige Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist genau dann holomorph, wenn für alle Viereckswege $\Diamond \subset \mathbb{C}$ gilt:

$$\int_{\Diamond} f = 0 \ .$$

Aufgabe 4.

a) Sei $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Abbildung mit unendlich vielen Nullstellen in der Menge

$$E := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \frac{1}{2} \right\} .$$

Zeigen Sie $f \equiv 0$.

b) Es sei $M > 0$ und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Abbildung mit $\mathrm{Re}(f(z)) > M$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

(Hinweis: Betrachten Sie $\frac{1}{|f|}$.)

Aufgabe 5. Wir definieren

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \begin{cases} \frac{z-1}{\exp(2\pi i z)-1} & \text{falls } z \notin \mathbb{Z}, \\ a & \text{falls } z \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie ein $a \in \mathbb{C}$, so dass f im Punkt $z = 1$ komplex differenzierbar ist.

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihenentwicklung von f um 1.

Aufgabe 6. Wir definieren die Wege $\gamma_i : [0,1] \to \mathbb{C}$, $i = 1, 2, 3$ wie folgt:

$$\gamma_1(t) := 2e^{4\pi i t} \ , \quad \gamma_2(t) := 2 - t \ , \quad \gamma_3(t) := 2e^{-2\pi i t} - 1 \ .$$

a) Skizzieren Sie den zusammengesetzten Weg $\gamma := \gamma_1\gamma_2\gamma_3(\gamma_2)^{-1}$ und geben Sie für die Zusammenhangskomponenten von $\mathrm{Int}(\gamma)$ die Umlaufzahlen an.

b) Berechnen Sie

$$\int_\gamma \frac{1}{z^4 + 4z^3 + 5z^2} \, dz \ .$$

c) Berechnen Sie das reelle Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin(t)}{4 - 2\cos(t)} \, dt \ .$$

Aufgabe 7. Geben Sie explizit eine Möbiustransformation an, die die rechte Halbebene

$$H := \{\, z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0 \,\}$$

auf die Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$ abbildet.

Zusatz zu Aufgabe . . .

Zusatz zu Aufgabe ...

Zusatz zu Aufgabe . . .

Zusatz zu Aufgabe ...