Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps Universität Marburg
Prof. Dr. Th. Bauer, Chr. Schulz

Sommersemester 2001

Jahresabschlussklausur zur Analysis
Donnerstag, den 04.10.2001, **9.35 - 12.35 Uhr**

Name											
Matrikelnummer											
Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe
Erreichbare Punkte	$5+5$	10	$6+4$	10	10	10	$5+5$	$5+5$	$6+4$	$3+7$	100
Erreichte Punkte											

Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt aus und versehen Sie <u>alle</u> Blätter mit Ihrem Namen!
Bearbeiten Sie die Aufgaben auf den ausgegebenen Blättern. Sollte der Platz unter der Aufgabenstellung und auf der Rückseite des Aufgabenblatts nicht ausreichen, so benutzen Sie bitte die leeren Blätter am Ende der Klausur.
Geben Sie die Klausur möglichst nach Aufgaben geordnet und geheftet ab (ein Hefter befindet sich bei der Abgabestelle).
Es sind keinerlei Hilfsmittel zugelassen.

Wir wünschen viel Erfolg!

Aufgaben:

Aufgabe 1. a) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2}$.

b) Zeigen Sie, dass für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\cdot a^n}{n!}$ konvergiert.

Aufgabe 2. Ein Lastwagenführer benötigt für die Fahrt von Marburg nach Frankfurt T Stunden ($T \in \mathbb{R}$, $T > 1$). Er behauptet, dass es unabhängig von der Verkehrslage mindestens einen Zeitpunkt t_0 gibt derart, dass sein LKW genau eine Stunde später die 10-fache Geschwindigkeit wie zum Zeitpunkt t_0 besitzt. Begründen Sie, dass er Recht hat.
(Hinweis: Sie dürfen davon ausgehen, dass die Geschwindigkeit des Lastwagens $v(t)$ zum Zeitpunkt t durch eine stetige Funktion $v : [0,T] \to \mathbb{R}_0^+$ bechrieben wird.)

Aufgabe 3. Es sei

$$\begin{aligned} f_n : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{nx}{1+n^2x^4} \; . \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise, aber nicht gleichmäßig konvergiert.

b) Gilt $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n$?

Aufgabe 4. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie: Falls der Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ existiert, dann gibt es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f'(a_n) = 0$. (Hinweis: Mittelwertsatz)

Aufgabe 5. Sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}_0^+$ eine monoton fallende und nicht negative Funktion. Beweisen Sie, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$ genau dann konvergiert, wenn das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)\,dt$ existiert.
(Hinweis: Schätzen Sie für $m \geq 0$ das Integral $\displaystyle\int_m^{m+1} f(t)\,dt$ nach oben und unten ab.)

Aufgabe 6. Seien $(V, ||\cdot||)$ und $(V', ||\cdot||')$ normierte Vektorräume und $L : V \to V'$ eine lineare Abbildung. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) L ist stetig.

(ii) L ist stetig im Punkt $0 \in V$.

(iii) Es gibt ein $C > 0$, so dass für alle $x \in V$ gilt $||L(x)||' \leq C \cdot ||x||$.

Aufgabe 7. Sei K ein kompakte Teilmenge der reellen Zahlen, $f : K \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung und

$$\Gamma_f := \{ (x, f(x)) \mid x \in K \} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

der Graph von f. Zeigen Sie:

a) Falls f beschränkt ist, ist Γ_f beschränkt.

b) Falls f stetig ist, ist Γ_f kompakt.

Aufgabe 8.

a) Überprüfen Sie, ob die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \frac{\sin|x\cdot y|}{x^2+y^2} & , \text{falls } (x,y) \neq (0,0) , \\ 0 & , \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

im Nullpunkt partiell differenzierbar ist.

b) Ist f stetig im Nullpunkt? Begründung?

Aufgabe 9.

a) Zeigen Sie, dass es ein $\varepsilon > 0$ und eine stetig differenzierbare Kurve $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^2$ gibt, die ganz in der Menge

$$\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot \exp(x) + y \cdot \exp(y) = -x \cdot y \}$$

verläuft.

b) Bestimmen Sie den Tangentialvektor (Ableitung) an diese Kurve im Nullpunkt.

Aufgabe 10.

a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + y = 0 .$$

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'' - 2y' + y = x \cdot \exp(-x) ,$$

$$y(0) = 0 , \quad y'(0) = 1 .$$

Aufgabe 1. a) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2}$.

b) Zeigen Sie, dass für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\cdot a^n}{n!}$ konvergiert.

Aufgabe 2. Ein Lastwagenführer benötigt für die Fahrt von Marburg nach Frankfurt T Stunden ($T \in \mathbb{R}$, $T > 1$). Er behauptet, dass es unabhängig von der Verkehrslage mindestens einen Zeitpunkt t_0 gibt derart, dass sein LKW genau eine Stunde später die 10-fache Geschwindigkeit wie zum Zeitpunkt t_0 besitzt. Begründen Sie, dass er Recht hat. (Hinweis: Sie dürfen davon ausgehen, dass die Geschwindigkeit des Lastwagens $v(t)$ zum Zeitpunkt t durch eine stetige Funktion $v: [0, T] \to \mathbb{R}_0^+$ bechrieben wird.)

Aufgabe 3. Es sei

$$\begin{aligned} f_n : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{nx}{1+n^2x^4} \;. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise, aber nicht gleichmäßig konvergiert.

b) Gilt $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n$?

Aufgabe 4. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie: Falls der Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ existiert, dann gibt es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f'(a_n) = 0$. (Hinweis: Mittelwertsatz)

Aufgabe 5. Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}_0^+$ eine monoton fallende und nicht negative Funktion. Beweisen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$ genau dann konvergiert, wenn das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f(t)\,dt$ existiert. (Hinweis: Schätzen Sie für $m \geq 0$ das Integral $\int_m^{m+1} f(t)\,dt$ nach oben und unten ab.)

Aufgabe 6. Seien $(V, ||\cdot||)$ und $(V', ||\cdot||')$ normierte Vektorräume und $L : V \to V'$ eine lineare Abbildung. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) L ist stetig.

(ii) L ist stetig im Punkt $0 \in V$.

(iii) Es gibt ein $C > 0$, so dass für alle $x \in V$ gilt $||L(x)||' \leq C \cdot ||x||$.

Aufgabe 7. Sei K ein kompakte Teilmenge der reellen Zahlen, $f : K \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung und

$$\Gamma_f := \{\, (x, f(x)) \mid x \in K \,\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

der Graph von f. Zeigen Sie:

a) Falls f beschränkt ist, ist Γ_f beschränkt.

b) Falls f stetig ist, ist Γ_f kompakt.

Aufgabe 8.

a) Überprüfen Sie, ob die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \frac{\sin|x\cdot y|}{x^2+y^2} & \text{, falls } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{, falls } (x,y)=(0,0) \end{cases} \end{array},$$

im Nullpunkt partiell differenzierbar ist.

b) Ist f stetig im Nullpunkt? Begründung?

Aufgabe 9.

a) Zeigen Sie, dass es ein $\varepsilon > 0$ und eine stetig differenzierbare Kurve $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^2$ gibt, die ganz in der Menge

$$\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot \exp(x) + y \cdot \exp(y) = -x \cdot y \}$$

verläuft.

b) Bestimmen Sie den Tangentialvektor (Ableitung) an diese Kurve im Nullpunkt.

Aufgabe 10.

a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + y = 0 \ .$$

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'' - 2y' + y = x \cdot \exp(-x) \ ,$$

$$y(0) = 0 \ , \quad y'(0) = 1 \ .$$

Zusatz zu Aufgabe ...

Zusatz zu Aufgabe . . .

Zusatz zu Aufgabe . . .

Zusatz zu Aufgabe . . .

Zusatz zu Aufgabe . . .