Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps Universität Marburg
Prof. Dr. Th. Bauer, Chr. Schulz

Wintersemester 2001/02

Jahresabschlussklausur zur Analysis
am 03.04.2002, um **9.35 - 12.35 Uhr**

Name											
Matrikelnummer											
Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe
Erreichbare Punkte	10	10	10	$3+3+4$	$6+4$	$5+4+1$	$4+6$	10	$6+4$	10	100
Erreichte Punkte											

Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt aus und versehen Sie alle Blätter mit Ihrem Namen!
Bearbeiten Sie die Aufgaben auf den ausgegebenen Blättern. Sollte der Platz unter der Aufgabenstellung und auf der Rückseite des Aufgabenblatts nicht ausreichen, so benutzen Sie bitte die leeren Blätter am Ende der Klausur.
Geben Sie die Klausur möglichst nach Aufgaben geordnet und geheftet ab (ein Hefter befindet sich bei der Abgabestelle).
Es sind keinerlei Hilfsmittel zugelassen.

Wir wünschen viel Erfolg!

Aufgaben:

Aufgabe 1. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit

$$a_n \leq a_{n+1} \leq a_n + \frac{1}{2^n} \ .$$

Beweisen Sie, dass die Folge konvergiert.

Aufgabe 2. In welchen Stellen ist die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{, falls } x \in \mathbb{Q} \ , \\ x & \text{, falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \end{aligned}$$

stetig?

Aufgabe 3. Begründen Sie, dass die Funktion

$$\begin{aligned} f : [-1,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n \cdot x)}{n^2} x^n \end{aligned}$$

wohldefiniert und stetig ist.

Aufgabe 4. Betrachten Sie die Potenzreihe $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

a) Berechnen Sie den Konvergenzradius R.

b) Berechnen Sie $f'(x)$ für $x \in (-R, R)$. Begründung?

c) Begründen Sie, dass für alle $x \in (-R, R)$ gilt: $f(x) = -\ln(1-x)$.

Aufgabe 5. a) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} x^3 \cdot \exp\left(-x^2\right) dx$.

b) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie den Grenzwert $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^\alpha - 1}{\ln(x)}$.

Aufgabe 6. Seien (X,d) und (X',d') metrische Räume.

a) Zeigen Sie, dass durch

$$\begin{array}{rcl} d_\infty : X^n \times X^n & \to & \mathbb{R} \\ ((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) & \mapsto & \max\{\, d(x_1,y_1),\dots,d(x_n,y_n)\,\} \end{array}$$

eine Metrik auf X^n definiert wird.

b) Beweisen Sie, dass eine Abbildung

$$\begin{array}{rcl} f : (X',d') & \to & (X^n,d_\infty) \\ x & \mapsto & (f_1(x),\dots,f_n(x)) \end{array}$$

genau dann stetig ist, wenn alle Koordinatenabbildungen $f_i : (X',d') \to (X,d)$ stetig sind $(i = 1,\dots,n)$.

c) Geben Sie (ohne Beweis) eine weitere Metrik auf X^n an.

Aufgabe 7. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und sei

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x \cdot y \cdot f(x,y)\ . \end{array}$$

Zeigen Sie, dass g im Nullpunkt

a) partiell differenzierbar ist,

b) total differenzierbar ist.

Aufgabe 8. Untersuchen Sie die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & y^2 - x^2 y - 4x^2 \end{array}$$

auf lokale Extrema.

Aufgabe 9. Sei $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und

$$\begin{array}{rcl} f : D & \to & (\mathbb{R}^+)^2 \\ (x,y) & \mapsto & (\exp(x^2 - y^2), \exp(-xy)) \end{array}$$

Untersuchen Sie, ob f

a) ein lokaler Diffeomorphismus ist,

b) ein (globaler) Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 10. Bestimmen Sie alle Lösungen des Anfangswertproblems

$$y' = y^2 \cdot x\ , \quad y < 0\ , \quad y(0) = -1\ .$$

Aufgabe 1. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit

$$a_n \leq a_{n+1} \leq a_n + \frac{1}{2^n} \ .$$

Beweisen Sie, dass die Folge konvergiert.

Aufgabe 2. In welchen Stellen ist die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{, falls } x \in \mathbb{Q} \text{ ,} \\ x & \text{, falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \end{aligned}$$

stetig?

Aufgabe 3. Begründen Sie, dass die Funktion

$$\begin{aligned} f : [-1,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n \cdot x)}{n^2}\, x^n \end{aligned}$$

wohldefiniert und stetig ist.

Aufgabe 4. Betrachten Sie die Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

a) Berechnen Sie den Konvergenzradius R.

b) Berechnen Sie $f'(x)$ für $x \in (-R, R)$. Begründung?

c) Begründen Sie, dass für alle $x \in (-R, R)$ gilt: $f(x) = -\ln(1-x)$.

Aufgabe 5. a) Berechnen Sie das Integral $\int_0^{\sqrt{2}} x^3 \cdot \exp\left(-x^2\right) dx$.

b) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^\alpha - 1}{\ln(x)}$.

Aufgabe 6. Seien (X, d) und (X', d') metrische Räume.

a) Zeigen Sie, dass durch

$$\begin{aligned} d_\infty : X^n \times X^n &\to \mathbb{R} \\ ((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) &\mapsto \max\{\, d(x_1, y_1), \ldots, d(x_n, y_n) \,\} \end{aligned}$$

eine Metrik auf X^n definiert wird.

b) Beweisen Sie, dass eine Abbildung

$$\begin{aligned} f : (X', d') &\to (X^n, d_\infty) \\ x &\mapsto (f_1(x), \ldots, f_n(x)) \end{aligned}$$

genau dann stetig ist, wenn alle Koordinatenabbildungen $f_i : (X', d') \to (X, d)$ stetig sind $(i = 1, \ldots, n)$.

c) Geben Sie (ohne Beweis) eine weitere Metrik auf X^n an.

Aufgabe 7. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und sei

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x \cdot y \cdot f(x,y) \ . \end{array}$$

Zeigen Sie, dass g im Nullpunkt

a) partiell differenzierbar ist,

b) total differenzierbar ist.

Aufgabe 8. Untersuchen Sie die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto y^2 - x^2 y - 4x^2 \end{aligned}$$

auf lokale Extrema.

Aufgabe 9. Sei $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und

$$\begin{array}{rcl} f : D & \to & (\mathbb{R}^+)^2 \\ (x, y) & \mapsto & (\exp(x^2 - y^2), \exp(-xy)) \end{array}$$

Untersuchen Sie, ob f

a) ein lokaler Diffeomorphismus ist,

b) ein (globaler) Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 10. Bestimmen Sie alle Lösungen des Anfangswertproblems

$$y' = y^2 \cdot x \ , \quad y < 0 \ , \quad y(0) = -1 \ .$$

Zusatz zu Aufgabe ...

Zusatz zu Aufgabe ...

Zusatz zu Aufgabe . . .

Zusatz zu Aufgabe . . .

Zusatz zu Aufgabe ...