Matthias Stemmler
stemmler@mathematik.uni-marburg.de SS 2007

Beweis der Hölder-Ungleichung

Wir benötigen zunächst einen Hilfssatz.

Satz (Young[1]-Ungleichung)
Sind $A, B \geqslant 0$ und $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, so gilt:

$$A^{1/p} B^{1/q} \leqslant \frac{A}{p} + \frac{B}{q}$$

Beweis
Wir benutzen die Konvexität der Exponentialfunktion, d. h. dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in [0, 1]$ gilt:

$$\exp\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) \leqslant (1-\lambda)\exp(x) + \lambda\exp(y) \tag{$*$}$$

Seien ohne Einschränkung $A, B > 0$. Wähle $x := \ln A$, $y := \ln B$ und $\lambda := \frac{1}{q}$. Wegen $q > 1$ ist $\lambda \in [0, 1]$. Außerdem gilt $1 - \lambda = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$. Wir erhalten:

$$A^{1/p} B^{1/q} = \exp\big(\ln(A^{1/p})\big)\exp\big(\ln(B^{1/q})\big) = \exp\left(\frac{1}{p}\ln A + \frac{1}{q}\ln B\right) \overset{(*)}{\leqslant} \frac{1}{p}\exp(\ln A) + \frac{1}{q}\exp(\ln B) = \frac{A}{p} + \frac{B}{q} \qquad \square$$

Damit können wir die Hölder-Ungleichung beweisen.

Satz (Hölder[2]-Ungleichung)
Sind $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ und $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, so gilt:

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \leqslant \|x\|_p \, \|y\|_q$$

Beweis
Seien ohne Einschränkung $\|x\|_p, \|y\|_q > 0$. Sei $j \in \{1, \dots, n\}$ fest. Wähle $A := \frac{|x_j|^p}{\|x\|_p^p} \geqslant 0$, $B := \frac{|y_j|^q}{\|y\|_q^q} \geqslant 0$. Wegen $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt nach der Young-Ungleichung:

$$\frac{|x_j y_j|}{\|x\|_p \, \|y\|_q} = \frac{|x_j|}{\|x\|_p} \cdot \frac{|y_j|}{\|y\|_q} = A^{1/p} B^{1/q} \leqslant \frac{A}{p} + \frac{B}{q} = \frac{|x_j|^p}{p\,\|x\|_p^p} + \frac{|y_j|^q}{q\,\|y\|_q^q}$$

Aufsummieren über $j = 1, \dots, n$ ergibt:

$$\frac{1}{\|x\|_p \, \|y\|_q} \sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \leqslant \frac{1}{p\,\|x\|_p^p} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p}_{=\,\|x\|_p^p} + \frac{1}{q\,\|y\|_q^q} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q}_{=\,\|y\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \leqslant \|x\|_p \, \|y\|_q \qquad \square$$

Bemerkung
Speziell im Fall $p = q = 2$ (hier gilt $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) erhält man die Cauchy-Schwarz-Ungleichung. Ist nämlich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^n$, so gilt:

$$|\langle x, y \rangle| = \left|\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \overset{\text{Hölder}}{\leqslant} \|x\|_2 \, \|y\|_2$$

[1] William Henry Young (1863–1942), britischer Mathematiker
[2] Otto Ludwig Hölder (1859–1937), deutscher Mathematiker