Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Ilka Agricola
Reinier Storm

Sommersemester 2015

Übungen zur Differentialgeometrie 2
– Blatt 0 –
Abgabe Donnerstag: –

Aufgabe 1. Sei G eine Lie Gruppe, $H \subset G$ eine Untergruppe und eine glatte Untermannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass H eine Lie Gruppe ist.

Aufgabe 2. Sei G eine Lie Gruppe und H eine Untergruppe. Sei $h \in H$ ein Punkt. Die folgende sind Aussagen sind äquivalent:

1. H ist eine Untermannigfaltigkeit von G im Punkt h.
2. H ist eine Untermannigfaltigkeit von G.

Aufgabe 3. Bekanntlich ist $SU(2)$, die Gruppe der unitären 2×2 Matrizen mit Determinante 1:

$$SU(2) = \{A \in GL(2, \mathbb{C}) : AA^* = 1, \det(A) = 1\}.$$

Sei $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ die Sphäre mit Radius 1 um den Ursprung. Für $x \in S^3$ definieren wir die Matrix

$$A_x := \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & -x_3 + ix_4 \\ x_3 + ix_4 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi : x \mapsto A_x$ ein Bijektion von S^3 nach $SU(2)$ ist.

b) Wir sehen S^3 als eine glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^4$ an und definieren durch φ eine glatte Struktur auf $SU(2)$. Zeigen Sie, dass mit diese differenzierbare Struktur $SU(2)$ eine Lie Gruppe ist.

c) Zeigen Sie, dass dadurch $SU(2)$ eine Glatte Untermannigfaltigkeit von $GL(2, \mathbb{C})$ ist.

Aufgabe 4. Man überlege sich, dass

$$X \mapsto e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}$$

eine Abbilding $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \to SL(2, \mathbb{R})$ definiert. Man zeige, dass diesse Abbildung nicht surjektiv ist. (Welche Werte kann $\operatorname{tr}(\exp(A))$ für $A \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ nicht annehmen.)