Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Ilka Agricola
Reinier Storm

Sommersemester 2015

Übungen zur Differentialgeometrie 2
– Blatt 1 –
Abgabe Donnerstag: 23.04

Aufgabe 1 (4 Punkte). Sei G eine Gruppe und gleichzeitig eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, sodass die Multiplikation eine glatte Abbildung ist. Zeigen Sie, dass G eine Lie Gruppe ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Wir errineren uns an die Gruppe der orthogonalen Matrizen:

$$O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : AA^t = I\}.$$

a) Sei S der Raum der symmetrischen $n \times n$ Matrizen. Zeigen Sie, dass $\varphi : A \to AA^t$ ein glatter Abbildung definiert von $M(n, \mathbb{R}) \to S$, und dass die Tangentialabbildung in I gegeben ist durch

$$T_I\varphi : X \mapsto X + X^t, \quad M(n, \mathbb{R}) \to S.$$

b) Zeigen Sie, dass φ eine Submersion in I ist.

c) Zeigen Sie, dass $O(n, \mathbb{R})$ eine Lie Gruppe ist.

d) Zeigen Sie, dass der Tangentialraum von $O(n)$ in der Identität, bzw. der Lie algebra $\mathfrak{o}(n)$, gegeben ist durch

$$\mathfrak{o}(n) = \{X \in M(n, \mathbb{R}) : X^t + X = 0\}.$$

e) Zeigen Sie, dass jede Matrix $A \in GL(n, \mathbb{R})$ eindeutig zu schreiben ist als $A = O \cdot M$, mit $O \in O(n)$ und

$$M \in S_+ = \{M \in M(n, \mathbb{R}) : M = M^t \quad \text{und} \quad X^t M X > 0\}.$$

f) Beweisen Sie, dass $GL(n, \mathbb{R})$ diffeomorph is zu $O(n) \times S_+$

Präsenzaufgaben:

Aufgabe 3. Zeigen Sei, dass die untere $\mathcal{D}_k(\mathfrak{g})$ bzw. die obere Zentralreihe $\mathcal{D}^k(\mathfrak{g})$ einer Lie algebra $\mathfrak{g}$ Ideale sind.

Aufgabe 4. Wir definieren die 3-dimensionale Heisenberggruppe wie folgt

$$H_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \subset GL(3, \mathbb{R})$$

wobei die Gruppenmultiplikation durch die Matrizenmultiplikation gegeben sei.

a) Zeigen Sie, dass $H_3(\mathbb{R})$ eine Lie Untergruppe ist.

b) Berechnen Sie die Lie Algebra $\mathfrak{h}_3(\mathbb{R})$ von $H_3(\mathbb{R})$ und zeigen Sie, dass $\mathfrak{h}_3(\mathbb{R})$ nilpotent ist.

Aufgabe 5.

a) Zeigen Sie, dass $\det : GL(V) \to \mathbb{R}$ ein Gruppehomomorphismus ist.

b) Zeigen Sie, dass die Ableitung von $\det : GL(V) \to \mathbb{R}$ in I gegeben ist durch

$$T_I \det = \operatorname{tr} : \operatorname{End}(V) \to \mathbb{R},\ A \mapsto \operatorname{tr}(A).$$

c) Zeigen Sie, dass

$$\det(e^A) = e^{\operatorname{tr} A}.$$

(Errineren Sie sich an die magischen Wörter: exp trace log = determinant)

Aufgabe 6. Wir identifizieren $M(n, \mathbb{R})$ mit $\mathbb{R}^{n^2}$. Sei $\langle -, - \rangle$ die induzierte Metrik auf $M(n, \mathbb{R})$ mit der Standard-Metrik auf $\mathbb{R}^{n^2}$.

1. Zeigen Sie, dass
$$\langle X, Y \rangle = \operatorname{tr}(XY^t), \quad X, Y \in M(n, \mathbb{R}).$$
2. Zeigen Sie, dass $O(n)$ enthalten in eine Späre von radius n um der Ursprung ist, bezüglich diese Metrik.
3. Zeigen Sie, dass $O(n)$ kompakt ist.

Aufgabe 7. Sei $\varphi : G \to H$ ein Gruppehomomorphismus, dann ist der Kern von φ eine abgeschlossene Untergruppe von G.

Aufgabe 8. Sei $\varphi, \psi : G \to H$ zwei Lie Gruppehomomorphismen und sei H zusammenhängend. Zeigen Sie, dass

$$\varphi = \psi \iff \varphi_* = \psi_*.$$