Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Ilka Agricola
Reinier Storm

Sommersemester 2015

Übungen zur Differentialgeometrie 2
– Blatt 2 –
Abgabe Donnerstag: 30.04

Aufgabe 1. Errineren Sie sich das

a) Zeigen Sie, dass $\exp : \mathfrak{so}(2) \to SO(2)$ surjektiv ist. Hinweis: Berechnen Sie:

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & -\varphi \\ \varphi & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Zeigen Sie, dass für jeden Matrix $x \in SO(n)$ existiert eine Matrix $y \in SO(n)$, sodass $x = yby^{-1}$ wo b nur 2×2 und 1×1 Block-Matrizen auf der Diagonalel hat.

c) Die Exponentialabbildung bildet $\mathfrak{so}(n)$ surjektiv auf $SO(n)$ ab für $n \geq 2$.

d) Zeigen Sie, dass $SO(n)$ zusammenhangend ist. Folgern Sie, dass $SO(n)$ die Zusammenhangskomponente der Identiät in $O(n)$ ist.

Aufgabe 2. Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra und $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ ein Ideal. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ eine eindeutige Lie Algebra Struktur bekommt, sodass die Projektion $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ ein Lie Algebra Homomorphismus ist.

Aufgabe 3. Wir errineren uns an die symplectische-Gruppe

$$SP(2n, \mathbb{R}) = \left\{ A \in GL(2n, \mathbb{R}) : A^T \Omega A = \Omega \right\},$$

wo

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass $SP(2n, \mathbb{R})$ eine Lie Gruppe ist.

b) Beschreiben Sie die Lie Algebra $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R})$ und leiten Sie eine Formel für die Dimension ab.