Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Ilka Agricola
Reinier Storm

Sommersemester 2015

Übungen zur Differentialgeometrie 2
– Blatt 3 –
Abgabe Donnerstag: 7.05

Aufgabe 1. Sei $\mathbb{K}$ gleich $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Der Grassmansche Raum $G_{n,k}(\mathbb{K}) \equiv G_{n,k}$ is die Menge aller k-dimensionalen lineaeren Unterräume von $\mathbb{K}^n$. Sei $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ die Menge aller linearen Abbildungen $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$. Gegeben $i = (i_1, \dots, i_k)$ mit $1 \leq i_1 < i_2 \dots < i_k \leq n$, sei $D_i(A)$ die Determinante der $k \times k$ Untermatrix von A gegeven durch die Spalten $i_1, \dots, i_k$. Die Menge $H_i = \{D_i(A) \neq 0\}$ ist offen in $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ (warum?). Sei $\mathrm{Hom}_0(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ die Menge aller Matrizen mit $\ker(A) = 0$, bzw die Vereinigung aller H_i.

Definiere $\rho : \mathrm{Hom}_0(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n) \to G_{n,k}$ durch $\rho(A) = A(\mathbb{R}^k)$.

a) Zeigen Sie, dass ρ surjektiv ist.

$G_{n,k}$ hat die Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit sodass ρ eine Submersion ist. Sei $\alpha : GL(n, \mathbb{K}) \times \mathrm{Hom}_0(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n) \to \mathrm{Hom}_0(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ gegeben durch $\alpha(g, A) = g \circ A$. Wir difinieren $\beta : GL(n, \mathbb{K}) \times G_{n,k} \to G_{n,k}$ durch $\beta(g, V) = g(V)$.

b) Zeigen Sie, dass α und β Gruppewirkungen sind und dass $\rho(\alpha(g, A)) = \beta(g, \rho(A))$.

c) Zeigen Sie, dass α und β glatt sind.

d) Zeigen Sie, dass $G_{n,k} \cong GL(n)/P$, wo P die Untergruppe

$$P = \left\{ A \in GL(n, \mathbb{K}) : g = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix},\ A \in GL(k),\ B = k \times (n-k)\text{-Matrix},\ C \in GL(n-k) \right\}$$

e) Zeigen Sie, dass $G_{n,k}$ kompakt ist.