Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Ilka Agricola
Reinier Storm

Sommersemester 2015

Übungen zur Differentialgeometrie 2
– Blatt 6 –
Abgabe Donnerstag: 11.06

Präsenzaufgaben:

Aufgabe 1. Wir betrachten den $\mathbb{R}^3$ mit der definierenden $SO(3,\mathbb{R})$-Wirkung.

a) Man beweise, dass diese Darstellung zur adjungierten Darstellung von $SO(3,\mathbb{R})$ auf ihrer Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3)$ äquivalent ist, wenn man $\mathbb{R}^3$ und $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ über die Abbildung

$$\widehat{\ } : \mathbb{R}^3 \to \mathfrak{so}(3,\mathbb{R}), \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \mapsto \widehat{v} = \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix}$$

miteinander identifiziert. Zudem sind die adjungierte und die koadjungierte Darstellung von $SO(3,\mathbb{R})$ ebenfalls äquivalent;

b) man beweise, dass diese Identifizierung die Gleichungen

$$\widehat{v}(w) = v \times w, \quad [\widehat{v}, \widehat{w}] = \widehat{[v,w]}, \quad \langle v, w\rangle = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\widehat{v}\widehat{w})$$

erfüllt.

c) nach a) kann die Momentenabbildung $\Psi : T^*\mathbb{R}^3 \to \mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ als Abbildung von $T^*\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$ geschrieben werden. Man zeige, dass sie sich dann in der Form

$$\Psi(q,p) = q \times p$$

schreiben lässt, also den klassischen Dreimpuls liefert.

Aufgabe 2. Sei V ein endlich dimensionaler reeler Vektorraum mit einem Skalarprodukt g, einer symplektische Form ω und eine komplexe Struktur J. Sei $h = g + i\omega$ die assozierte hermitische Form. Zeigen Sie, dass

$$U(V,j,h) = O(V,g) \cap Sp(V,\omega) = O(V,g) \cap GL(V,J) = Sp(V,\omega) \cap GL(V,J).$$

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass eine fast komplexe Struktur J auf M^{2n} genau dann integrabel ist , falls $N = 0$.

Aufgabe 4. Sei G/K eine homogener Raum und sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ eine Zerlegung der Lie-Algebra der Lie-Gruppe G. Zeigen Sie, dass die Isotropiedarstellung ρ sich durch die adjungierte Darstellung ausdrücken lässt.: $\rho = \mathrm{Ad}|_K$.

Aufgabe 5. Beschreiben Sie eine fast-komplexe Struktur auf dem homogenen Raum $SU(3)/(S^1 \times S^1)$.

Hausaufgaben:

Aufgabe 6. Sei $G \times M \to M$ eine symplektische Gruppewirkung eines kompakten Gruppe G auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit (M, ω). Zeigen Sie, dass ein kompatibles Tripel (g, ω, J) existiert, mit g eine Riemannsche Metrik ist, J ein fast-komplexe Struktur und beide invariant unter der Gruppewirkung.

Zeigen Sie, mithilfde des Satzes von Darrboux, dass um einen Fixpunkt Koordinaten existieren, sodass die Gruppenwirkung in diesen Koordinaten linear ist. Folgern Sie, dass die Fixpunkt Menge M_G eine symplektische Untermannigfaltigkeit ist.