Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Ilka Agricola
Reinier Storm

Sommersemester 2015

Übungen zur Differentialgeometrie 2
– Blatt 7 –
Abgabe Donnerstag: 18.06

Hausaufgaben:

Aufgabe 1. Sei G/K ein homogener Raum und sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ eine Zerlegung der Lie-Algebra der Lie-Gruppe G. Zeigen Sie, dass die Isotropiedarstellung ρ sich durch die adjungierte Darstellung ausdrücken lässt: $\rho = \mathrm{Ad}|_K$.

Aufgabe 2. Sei $G = U(3)$ und $K = U(1) \times U(1) \times U(1) \subset G$ diagonal eingebettet. $M = G/K$ ist eine 6-dimensionale Mannigfaltigkeit. Wir zerlegen $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$, wo $\mathfrak{k}$ der Lie algebra von K ist und

$$\mathfrak{m} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{C} \right\}$$

das orthogonal Komplement bezüglich der Killingform $\beta(X, Y) = -\frac{1}{2}\mathrm{Re}(tr(XY))$ ist. Als Basis verwenden wir folgende Bezeichnungen: Sei D_{ji} die $n \times n$-Matrix mit 1 an der Stelle (i, j) und sonst Null; setze $E_{ij} = D_{ij} - D_{ji}$ und $S_{ij} = i(D_{ij} + D_{ji})$. Wir bilden die folgende Orthogonalbasis

$$e_1 := E_{12}, \quad e_2 := S_{12}, \quad e_3 := E_{13}, \quad e_4 := S_{13}, \quad e_5 := E_{23}, \quad e_6 := S_{23}.$$

Zeigen Sie, dass die Isotropie-Darstellung $Ad : K \to SO(6)$ für $h = \mathrm{diag}(e^{it}, e^{is}, e^{ir})$, mit $t, s, r \in \mathbb{R}$, gegeben ist durch

$$Ad(h) = \begin{pmatrix} C(t-s) & 0 & 0 \\ 0 & C(t-r) & 0 \\ 0 & 0 & C(s-r) \end{pmatrix}, \quad \text{wobei } C(x) := \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}.$$

Was ist das Differential dieser Darstellung?

Präsenzaufgaben

Aufgabe 3. Wir schauen uns den Fall beinaher Kähler'scher Mannigfaltigkeiten etwas genauer an. Kombiniert man die Formeln a) und b) so kürzen sich dann die letzten beiden Terme weg.

$$(*) \qquad g((\nabla^g_X)JY, Z) = g(N(X, Y), Z) + d\Omega(JX, JY, JZ).$$

Zudem kann man den Nijenhuis-Tensor vereinfachen. Zeigen Sie, dass $N(X, Y) = 4(\nabla^g_X J)(JY)$ gilt, und dass $T(X, Y, Z) := g((\nabla^g_X J)JY, Z)$ eine 3-Form ist. Damit wird durch

$$\nabla_X Y := \nabla^g_X Y + \frac{1}{2} T(X, Y)$$

ein metrischer Zusammenhang mit schiefsymmetrischer Torsion definiert. Zeigen Sie, dass $\nabla J = 0$ gillt.