Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Ilka Agricola
Reinier Storm

Sommersemester 2015

Übungen zur Differentialgeometrie 2
– Blatt 9 –
Abgabe Freitag: 02.07

Präsenzaufgaben:

Aufgabe 1. Sei $P \to X$ ein G-HFB und $\rho_i : G \to GL(V_i)$ Darstellungen der Gruppe G for $i = 1, 2$. Sei $\rho_1 \otimes \rho_2$ die Tensorprodukt Darstellung. Zeigen Sie, dass

$$(P \times_{\rho_1} V_1) \otimes (P \times_{\rho_2} V_2) \cong P \times_{\rho_1 \otimes \rho_2} V_1 \otimes V_2$$

Aufgabe 2. Sei $E = S^n \times \mathbb{R} \to S^n$ das triviale Bündel. Zeigen Sie, dass $TS^n \oplus E$ ein triviales Vektorbündel ist.

Aufgabe 3. Sei $M^n = G/H$ ein homogener Raum und $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ eine reduktive Zerlegung.

a) Zeigen Sie, dass das Reper-Bündel $L(M)$ isomorph zu dem assoziierten Bündel

$$G \times_\rho GL(\mathfrak{m}),$$

ist, wo $\rho : H \to GL(\mathfrak{m})$ die Isotropie-Darstellung ist.

b) Wir nehmen an dass eine $\mathrm{Ad}(H)$-invariante Metrik auf $\mathfrak{m}$ existiert. Dann gillt für diese Metrik, dass $\rho : H \to O(\mathfrak{m}) \subset GL(\mathfrak{m})$. Wir setzen weiter voraus, dass H ein Lift nach $Spin(n)$ hat.

$$\begin{tikzcd} & Spin(n) \arrow[d, "\pi"] \\ H \arrow[ur, "\hat{\rho}"] \arrow[r, "\rho"'] & SO(n). \end{tikzcd}$$

Zeigen sie, dass das assoziierte $Spin(n)$-Bündel $G \times_{\hat{\rho}} Spin(n)$ eine Spin-Struktur auf M definiert.

Hausaufgaben: **Aufgabe 4**. Zeigen Sie, dass das ON-Reper-Bündel $O(M^{2n}, g)$ genau dann eine $U(n)$-Reduktion hat, wenn da eine kompatible fast-komplexe-Struktur auf M existiert.

Aufgabe 5. Sei $G = U(3)$ und $K = U(1) \times U(1) \times U(1)$ so wie auf Blatt 7. Zeigen Sie, dass eine kompatible fast-komplexe Struktur auf $M = G/K$ existiert.