Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Ilka Agricola
Reinier Storm

Sommersemester 2015

Übungen zur Differentialgeometrie 2
– Blatt 10 –
Abgabe Donnerstag: –

Aufgabe 1. Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $(P, \pi, M; G)$ ein glattes Hauptfaserbündel mit Zusammenhangsform Z, und β eine nichtausgeartete, $\mathrm{Ad}(G)$-invariante symmetrische Bilinearform auf der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von G.

Beweisen Sie:

a) $h := \pi^*g + \beta^*Z$ ist eine semi-Riemannsche Metrik auf P . Welche Metrik ist dies im Fall eines trivialen Hauptfaserbündels?

b) Die Rechtstranslationen $R_a : P \to P$, $a \in G$, sind Isometrien bezüglich der Metrik h auf P, d.h. $R_a^* h = h$.

c) Die fundamentalen Vektorfelder der G-Wirkung auf P sind Killingfelder für die Metrik h.

Aufgabe 2. Wir betrachten die Hopf-Faserung $\pi S^3 \to \mathbb{C}P^1 = S^2$, mit

$$S^3 = \{(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{C}^2 : |\omega_1|^2 + |\omega_2|^2 = 1\}$$

und der S^1-Wirkung $S^3 \times S^1 \to S^3$

$$(\omega_1, \omega_2) \cdot z = (\omega_1 z, \omega_2 z).$$

In diesem S^1-HFB konstruieren wir jetzt einen Zusammenhang. Sei

$$Z = \frac{1}{2}(\overline{w}_1 dw_1 - w_1 d\overline{w}_1 + \overline{w}_2 dw_2 - w_2 d\overline{w}_2).$$

Weil für jedes $z \in \mathbb{C}$, $z - \overline{z} \in i\mathbb{R}$ gilt, ist Z eine 1-form auf S^3 mit Werten in $i\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass Z die folgenden Eigenschaften

1. Z ist invariant unter der S^1-Wirkung, d.h. $(R_z)^*Z = Z$, $z \in S^1$.
2. Ist $ix \in i\mathbb{R}$ und $\widetilde{ix}$ das fundamentale Vektorfeld auf S^3, so gilt $Z(\widetilde{ix}) = ix$.
3. Seine Krümmung ist gegeben durch

$$\Omega = dZ = -dw_1 \wedge d\overline{w}_1 - dw_2 \wedge d\overline{w}_2$$

als 2-form auf S^3 mit Weten in $i\mathbb{R}$.