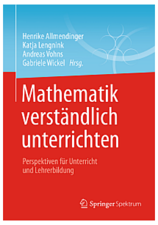


Erschienen in: H. Allmendinger, K. Lengnink, A. Vohns, G. Wickel (Hrsg.),
Mathematik verständlich unterrichten. Perspektiven für Unterricht und Lehrerbildung.
Springer-Spektrum, 2013.

Schulmathematik und universitäre Mathematik – Vernetzung durch inhaltliche Längsschnitte

Thomas Bauer

Zusammenfassung

In jüngster Zeit hat das Bewusstsein um die Bruchstellen zwischen Schulmathematik und universitärer Mathematik stark zugenommen. Insbesondere wurde deutlich, dass es notwendig ist, in der Lehramtsausbildung die Studierenden durch geeignete Schnittstellenaktivitäten gezielt zum Aufbau der erwünschten Verknüpfungen anzuregen. Der Verfasser verfolgt dieses Ziel seit einigen Jahren im Rahmen von speziellen Übungsaufgaben innerhalb eines als Schnittstellenmodul konzipierten Analysis-Moduls. Im vorliegenden Text wird gezeigt, wie im Rahmen solcher Aufgaben inhaltliche Längsschnitte von der Sekundarstufe I über die gymnasiale Oberstufe zur Analysisvorlesung und darüber hinaus gebildet werden können. Dies wird konkretisiert durch ein Beispiel, das von elementargeometrischen Extremwertproblemen bei Rechtecken über heuristisch oder analytisch bearbeitbare Fragen bei Ellipsen bis hin zur isoperimetrischen Ungleichung in der Differentialgeometrie führt. Dabei zeigt sich, dass die stufenweise Erhöhung des Abstraktionsgrads und die Weiterentwicklung der verfügbaren mathematischen Werkzeuge die Reichweite und Tiefe der Untersuchung verändert, während sich in den Arbeitsweisen über die Stufen hinweg durchaus viele Übereinstimmungen finden.

Inhaltsverzeichnis

Thomas Bauer, Fachbereich Mathematik und Informatik, Philipps-Universität Marburg, Hans-Meerwein-Straße, 35032 Marburg, E-Mail: tbauer@mathematik.uni-marburg.de

1 Mit Schnittstellenaufgaben der doppelten Diskontinuität begegnen

Dass Lehramtsstudierende im Fach Mathematik den Übergang von der Schule zur Universität (am Beginn ihres Studiums) und den Übergang von der Universität zur Schule (am Ende ihres Studiums) als Bruchstellen erleben, ist seit langem erkannt und wurde bereits vor fast 90 Jahren von Felix Klein mit dem Schlagwort der *doppelten Diskontinuität* beschrieben (Klein 1924). In den letzten Jahren ist die Aufmerksamkeit auf die Problematik, die aus diesen Bruchstellen für das Mathematikstudium resultiert, stark gewachsen (siehe Hefendehl-Hebeker 2013 und Beutelspacher et al. 2011). Insbesondere steigt das Bewusstsein, dass sich bei vielen Studierenden die gewünschten Bezüge zwischen Schulmathematik und universitärer Mathematik nicht von alleine einstellen, sondern dass hierfür geeignete Aktivitäten innerhalb der universitären Ausbildung benötigt werden. In Bauer und Partheil (2009) und Bauer (2013) wird beschrieben, wie der Autor dieser Herausforderung mit einem als Schnittstellenmodul konzipierten Analysis-Modul begegnet: Durch *Schnittstellenaufgaben* werden gezielt Bezüge zwischen Schulmathematik und universitärer Mathematik hergestellt. Ihr Ziel ist es, bei den Studierenden stabile Verknüpfungen zwischen den schulischen Vorerfahrungen und den neu zu erarbeitenden Gegenständen der Hochschulmathematik aufzubauen. Die Materialien hierzu sind im Arbeitsbuch Bauer (2012) bereitgestellt.

Im vorliegenden Text möchte der Autor zeigen, wie im Rahmen von Schnittstellenaufgaben sogar *inhaltliche Längsschnitte* gebildet werden können, die von der 5. Jahrgangsstufe bis zu vertiefenden Mathematikvorlesungen reichen: Eine mathematische Fragestellung/Idee kann in den verschiedenen Lernstufen in unterschiedlicher Weise bearbeitet werden – Änderungen im Abstraktionsgrad und in den verfügbaren mathematischen Werkzeugen verändern die Reichweite und Tiefe der Untersuchung, während sich in den Arbeitsweisen durchaus viele Übereinstimmungen finden (siehe hierzu Abschn. 4).

Die Motivation, solche Längsschnitte für die Lehramtsausbildung nutzbar zu machen, verdanke ich L. Hefendehl-Hebeker, die anhand eines in mehreren Stufen ausgestalteten Beispiels aus der Algebra gezeigt hat, welche inhaltlichen und prozeduralen Möglichkeiten sich Lehramtsstudierenden eröffnen, die sich solcher Stufungen und der auftretenden Stufenübergänge bewusst sind (Hefendehl-Hebeker 1995).

Zur Organisation dieses Artikels: Ich beschreibe in Abschnitt 2 ein Beispiel aus Geometrie und Analysis, das einen fachlichen Längsschnitt im genannten Sinne bildet. In Abschnitt 3 wird dessen Umsetzung in eine Schnittstellenaufgabe vorgestellt, die sich an Studierende der Analysis wendet und vom Verfasser im Rahmen der Analysis-Übungen eingesetzt wird.

2 Vom Rechtecksumfang zur isoperimetrischen Ungleichung – ein fachlicher Längsschnitt

Stufe 1: Elementargeometrie und elementare Algebra in der Schule

Rechteck und Quadrat sind die ersten geometrischen Figuren, an denen in der Sekundarstufe I die Begriffe *Umfang* und *Flächeninhalt* erarbeitet werden (siehe z.B. Feuerlein und Rieger 2009, Abschn. 10 und 11). Bekannt sind auch die Konstruktionsaufgaben, die dazu auffordern, nur unter Verwendung von Zirkel und Lineal ein Rechteck in ein flächengleiches Quadrat zu verwandeln („Quadratur von Rechtecken“, siehe z.B. Feuerlein und Distel 2007, Abschn. 6.3). Wenn Erfahrung mit verschiedenen Formen von Rechtecken gesammelt ist, liegen Extremwertfragen nahe:

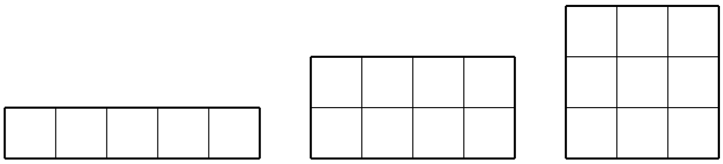


Abb. 1: Extremwertaufgabe elementargeometrisch: Endlich viele Möglichkeiten bei ganzzahligen Seitenlängen und gegebenem Umfang. Die „Flächenausbeute" ist umso geringer, je flacher das Rechteck ist.

(R1) Gibt es bei gegebenem Flächeninhalt ein Rechteck vom größtem Umfang?
(R2) Gibt es bei gegebenen Umfang ein Rechteck von größtem Flächeninhalt?

Zu (R1): Das Nachdenken über diese Frage ist eine gute Übung der geometrischen Vorstellung, denn es ist hier erforderlich, sich Rechtecke jenseits der praktischen Zeichenmöglichkeiten vorzustellen – z.B. ein Rechteck, dessen eine Seite „von hier bis nach Paris" reicht. Es hat großen Umfang, aber sein Flächeninhalt kann sehr klein sein, wenn die zweite Seite klein ist. Anhand der Flächenformel $A = pq$ lässt sich erhärten, dass man in der Tat erreichen kann, dass bei gegebenem Flächeninhalt der Umfang so groß wird, *wie man möchte*, wenn man nur eine der Rechtecksseiten *genügend klein* macht.[1] Nach diesen Überlegungen wird deutlich, dass es ein extremales Rechteck, wie es in (R1) gesucht wird, nicht gibt.

Zu (R2): Diese Frage führt zur Sonderstellung des Quadrats als extremalem Rechteck. Wir gehen kurz auf verschiedene mögliche Bearbeitungs- und Lösungswege ein:

(1) Experimentelles Vorgehen. Beschränkt man sich bei der Untersuchung (stufengemäß) auf ganzzahlige Seitenlängen, so existieren zu gegebenem Quadrat nur endlich viele Rechtecke gleichen Umfangs – die Frage lässt sich dann experimentell beantworten, indem bei gegebenem Umfang alle Möglichkeiten (zeichnerisch oder mit geeignetem Legematerial) durchprobiert werden (siehe Abb. 1). Diese Aktivität fördert bereits die Intuition, dass die „Flächenausbeute" umso geringer ist, je flacher das Rechteck ist.

(2) Geometrisches Umbau-Argument. Baut man ein Quadrat nach dem in Abb. 2 angedeuteten Verfahren in ein umfangsgleiches Rechteck um (siehe hierzu Hefendehl-Hebeker 2002, Abschn. 3.1.3, und Stowasser 1976), so wird der Flächeninhalt durch den Umbau offenbar verkleinert. Diese geometrische Einsicht enthält bereits den Kern eines stichhaltigen Arguments, das die Extremalität des Quadrats beweist – zur Vervollständigung der Argumentation überlegt man sich noch, dass man *jedes* zum Quadrat umfangsgleiche Rechteck durch einen solchen Umbau erreichen kann.[2]

(3) Algebraisches Argument mit der Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel. Hat ein Rechteck die Seitenlängen p und q, so hat ein umfangsgleiches Quadrat die Seitenlänge

$$a = \tfrac{p+q}{2} \,.$$

[1]Es handelt hierbei natürlich um den Kern der ε-δ-Formulierung einer Grenzwertaussage. In Konkretisierungen der folgenden Art kann dieser Gedanke bereits in frühen Lernstufen erscheinen: „Von Marburg nach Paris sind es 500 Kilometer. Wie schmal muss ein Rechteck sein, dessen Flächeninhalt nur 1 cm^2 beträgt, damit es von Marburg bis nach Paris reicht? Wie schmal muss es sein, damit es bis nach New York reicht?"

[2]Umbauargumente dieser Art gibt es in verschiedenen Varianten – sie haben eine lange Tradition, die bis zu Euklids Elementen zurückreicht (siehe Rademacher und Toeplitz 1930, S. 9ff, und Danckwerts und Vogel 1997, sowie Danckwerts und Vogel 2005, S. 177ff).

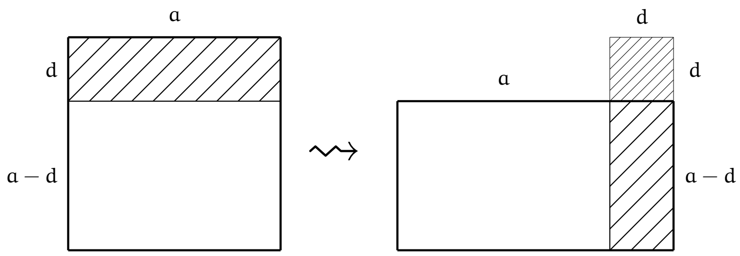


Abb. 2: Extremwertaufgabe elementargeometrisch: Umbau eines Quadrats in ein umfangsgleiches Rechteck. Der Flächeninhalt verringert sich um d^2.

Für die Flächeninhalte A_R und A_Q von Rechteck bzw. Quadrat gilt dann

$$A_R = pq \quad \text{und} \quad A_Q = a^2 = \tfrac{1}{4}(p+q)^2 \,.$$

Kennt man nun die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel,

$$\tfrac{p+q}{2} \geqslant \sqrt{pq}\,, \tag{$*$}$$

so folgt daraus unmittelbar die zu zeigende Ungleichung

$$A_Q \geqslant A_R \,.$$

In der Tat ist diese offensichtlich zur Mittel-Ungleichung $(*)$ äquivalent und kann als deren geometrischer Inhalt gesehen werden.[3] Falls die Ungleichung $(*)$ in einer vorliegenden Unterrichtssituation noch nicht verfügbar ist, so bietet die Extremwertaufgabe einen inhaltlich begründeten Anlass, diese zu erarbeiten[4]

(4) Algebraisches Argument mit quadratischen Funktionen. Ist der Umfang U eines Rechtecks vorgegeben, so ist durch die Länge p einer Rechtecksseite die Länge der anderen als $q = \frac{U}{2} - p$ festgelegt und der Flächeninhalt somit gleich $p(\frac{U}{2} - p)$. Es geht bei (R2) also darum, das Maximum der quadratischen Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto x(\tfrac{U}{2} - x)$$

zu bestimmen. Da sie eine nach unten geöffnete Parabel darstellt, hat sie ein Maximum im Scheitelpunkt. Dessen x-Koordinate ist der Mittelpunkt der beiden Nullstellen 0 und $\frac{U}{2}$, also gleich $\frac{U}{4}$. Die Seitenlängen des gesuchten Rechtecks sind somit $p = \frac{U}{4}$ und $q = \frac{U}{2} - p = \frac{U}{4}$, es handelt sich also um ein Quadrat.

Möglichkeiten zum Weiterarbeiten. Auf dieser Stufe sind selbstverständlich viele weitere Aktivitäten möglich: Man kann weitere Extremalaufgaben zu Rechtecken bearbeiten, wie es etwa in Stowasser (1976) vorgeschlagen wird. Und man kann beginnen, räumliche Situationen zu erkunden und dort Oberfläche und Volumen von Quadern und weiteren Körpern betrachten (siehe Hefendehl-Hebeker 2002, Abschn. 3.1.4). Als Vorstufe hierzu – und generell zum Trainieren der Raumvorstellung – kann zum Beispiel der Soma-Würfel zum Einsatz kommen (siehe z.B. Bildungsserver Hessen 2012). Ferner ist es sehr natürlich, analog zu den

[3] So auch bei Rademacher und Toeplitz (1930, S. 11), die die Mittel-Ungleichung als Übersetzung des genannten geometrischen Ergebnisses der griechischen Mathematik in die algebraische Formelsprache auffassen.

[4] Die verwendete Version (für nur zwei Variablen) folgt direkt aus der Ungleichung $(x-y)^2 \geqslant 0$ durch Anwenden der binomischen Formel und Ersetzen von x und y durch $\sqrt{p}$ bzw. $\sqrt{q}$. Dagegen ist die hier nicht benötigte Version für mehr als zwei Variablen im Beweis aufwendiger.

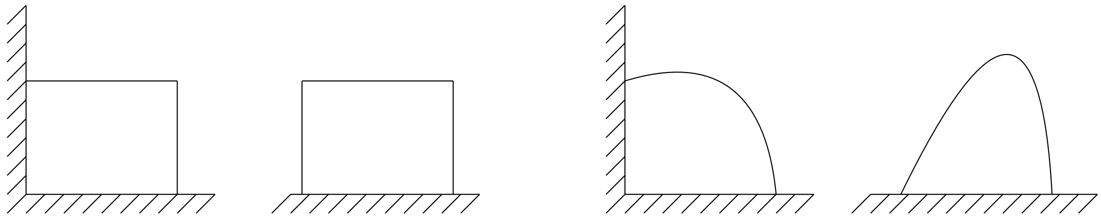


Abb. 3: Extremwertaufgaben „mit Wänden". Links: zwei Varianten der „Hühnerhof-Aufgabe" aus Lambacher Schweizer (2001, S. 104) — Rechts: zwei Varianten des Dido-Problems nach Andelfinger und Oettinger (1976, S. 74)

in (R1) und (R2) formulierten Problemen auch die Fragen nach *minimalem* Umfang bzw. Flächeninhalt zu stellen und ihre Beziehung zu den Maximum-Fragen zu diskutieren. Zu weiteren Extremwertproblemen bietet das Themenheft Danckwerts und Vogel (2001) eine Reihe von Anregungen und Vorschlägen.

Stufe 2: Analysis in der Schule

Quadrate und Rechtecke. Die Oberstufenanalysis eröffnet eine weitere Lösungsmöglichkeit für das Extremwertproblem (R2). In der Tat dient dieses dort als bekanntes Standardbeispiel und findet sich in verschiedensten Einkleidungen, wie etwa der „Hühnerhofaufgabe" aus Lambacher Schweizer (2001, S. 104): Mit einem Zaun von gegebener Länge soll ein Hühnerhof rechteckig eingezäunt werden. Dabei soll die Form des Hofs so gewählt werden, dass der Flächeninhalt möglichst groß wird. Zur Lösung lässt sich die in Abschnitt 2 betrachtete quadratische Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto x(\tfrac{u}{2} - x) = -x^2 + \tfrac{u}{2} \cdot x\,,$$

die den Flächeninhalt des Hofs in Abhängigkeit von der Länge einer Seite angibt, mit den Mitteln der Differentialrechnung auf Extrema untersuchen: Die Stelle $\frac{u}{4}$ ist rasch als Maximum ermittelt, da die Ableitung f' dort ihre einzige Nullstelle hat und f'' dort negativ ist.

Varianten. Zu dieser klassischen Aufgabenstellung gibt es Varianten, z.B. wird in einer Aufgabe aus Danckwerts und Vogel (2005, S. 211) eine Mindestlänge für eine der beiden Seiten vorgeschrieben, wodurch eine Reflexion des analytischen Kalküls herausgefordert wird. Bekannt sind auch Varianten „mit Wänden": Beim Einzäunen (im Kontext der obigen Aufgabe) sollen eine oder zwei Wände als Begrenzungen verwendet werden (siehe Abb. 3 links).

In Andelfinger und Oettinger (1976, S. 74) findet sich eine sehr interessante Aufgabenvariante: Zunächst wird als Information der mathematische Satz vorgegeben, dass unter allen geschlossenen Kurven gleichen Umfangs der Kreis die größte Fläche einschließt. (Wir kommen auf die hier zugrundeliegende *isoperimetrische Ungleichung* in Abschnitt 3 zurück.) Der Arbeitsauftrag ist dann in der Einkleidung des *Problems der Dido* formuliert, bei dem ein Stück Land an der Küste so abgegrenzt werden soll, dass eine möglichst große Fläche eingeschlossen wird (siehe Abb. 3 rechts). Die Herausforderung in der Aufgabe liegt darin, dass die Kurve von den Schülern nicht durch Rechnung oder Konstruktion bestimmt werden kann. Vielmehr findet man sie argumentativ – und zwar durch Rückführung des Problems auf eine Aufgabenstellung „ohne Wand": Aus der mitgeteilten Extremalaussage für geschlossene Kurven kann man auf die Fälle mit einer oder zwei Wänden rückschließen.[5] Die Aufgabenstellung bietet

[5] Die Kernidee dabei ist: Mit doppelter bzw. vierfacher Länge lässt sich eine *geschlossene* Kurve herstellen, die den doppelten bzw. vierfachen Flächeninhalt hat.

daher eine sehr interessante Bildungschance im logischen Argumentieren – die zur Wirkung kommt, obwohl der Ausgangspunkt (Extremaleigenschaft des Kreises) außerhalb der Reichweite dieser Lernstufe ist.[6]

Kreise und Ellipsen. Nach etwas Erfahrung mit Ellipsen kann man Fragen formulieren, die in Analogie zu Quadraten und Rechtecken naheliegen. Zu (R1) und (R2) entsprechend findet man:

(E1) Gibt es unter allen Ellipsen von gegebenem Flächeninhalt eine mit größtem Umfang?
(E2) Gibt es unter allen Ellipsen von gegebenen Umfang eine mit größtem Flächeninhalt?

Mit schulmathematischen Mitteln sind hierzu zwar keine vollständig durchgeführten Lösungen erreichbar, aber die Fragen geben einen guten Ausgangspunkt für wichtige mathematische Aktivitäten: Vermutungen aufstellen, experimentieren, Plausibilitätsargumente finden und formulieren.

Zu (E1): In Analogie zur Situation bei Rechtecken kann man sich leicht sehr flache Ellipsen vorstellen, die „bis nach Paris" reichen – bei vorgegebenem Flächeninhalt müsste man also große Umfänge erreichen können. Erhärten lässt sich dies, wenn man für den Flächeninhalt A einer Ellipse mit den Halbachsen a und b die Formel

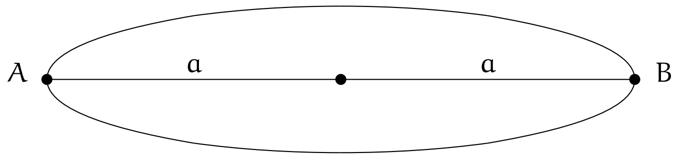
$$A = ab\pi$$

zur Verfügung hat und begründet, dass für den Umfang U die Ungleichung

$$U \geqslant 4a \qquad (*)$$

gilt (unabhängig von b). Damit folgt, dass jeder vorgegebene Flächeninhalt A mit beliebig großem Umfang U erreichbar ist: Man wählt zunächst a so groß, dass ein vorgegebener Umfang überschritten wird und wählt anschließend b passend, um einen vorgegebenen Flächeninhalt A zu erreichen. Es bleibt zu klären, wie man zur Ungleichung $(*)$ gelangen kann.

- In Stufe 3 lässt sie sich analytisch finden und beweisen (siehe nachfolgender Teilabschnitt).
- In der vorliegenden Stufe 2 kann sie bereits heuristisch gefunden und plausibel gemacht werden:



Der Weg auf der Ellipse vom Punkt A zum Punkt B ist mindestens so lang wie der geradlinige Weg auf der Strecke von A nach B. Diese auf dem Prinzip „Strecken sind die kürzesten Verbindungen" beruhende Aussage führt zur Ungleichung $\frac{U}{2} \geqslant 2a$.

[6] Die oben beschriebene klassische Aufgabe zu Rechtecken an vorgegebenen Wänden lässt sich in derselben Weise rein argumentativ lösen. Allerdings darf man vermuten, dass die vorherige analytische Behandlung des Falls ohne Wände die Schüler eher zu einer rechnerischen Lösung leitet.

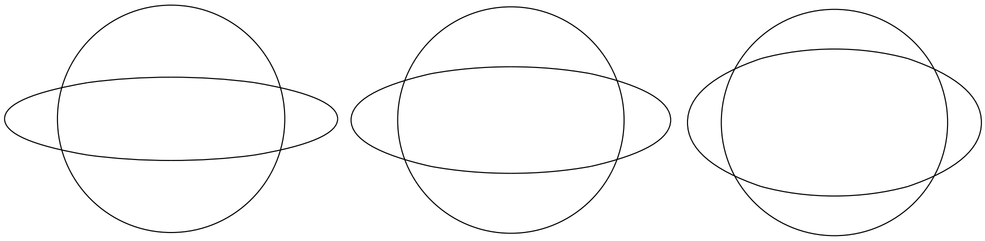


Abb. 4: Vergleich des Flächeninhalts bei umfangsgleichen Ellipsen. Je mehr sich die Ellipse der Kreisform nähert, desto größer wird ihr Flächeninhalt.

Zu (E2): Durch die bisherigen Überlegungen wird die folgende Analogie-Vermutung sehr plausibel: *Die Kreise spielen unter den Ellipsen dieselbe Rolle spielen wie die Quadrate unter den Rechtecken.* Die Antwort auf (E2) sollte also „Kreis" lauten. Durch optischen Vergleich an vorgegebenen Bildern (siehe Abb. 4) lässt sich diese Analogie-Vermutung empirisch bestärken. Ein *Beweis*, dass unter allen umfangsgleichen Ellipsen der Kreis tatsächlich am flächengrößten ist, liegt zwar nicht prinzipiell über den Möglichkeiten der Schulanalysis, jedoch würde der Autor ihn aufgrund des technischen Anspruchs eher in einer universitären Analysis-Vorlesung verorten (siehe nachfolgender Teilabschnitt).

Stufe 3: Analysis an der Universität

Das Extremwertproblem (R2) kann wie in der gymnasialen Oberstufe als Einstiegsbeispiel dienen, das die Nutzung der analytischen Methode zur Bestimmung von Extrema an einem (in dieser Lernstufe sehr einfachen) Beispiel illustriert. Zu Demonstrations- und Übungszwecken kann dies zusätzlich zur direkten elementar-algebraischen Lösung sinnvoll sein.

Neue Möglichkeiten bietet die universitäre Analysis bei der Bearbeitung der Probleme (E1) und (E2) zu Ellipsen und Kreisen – die auf dieser Lernstufe intensivere konzeptuelle Durchdringung bringt erweiterte Handlungsmöglichkeiten: Nach Erarbeiten der Begriffe *rektifizerbare Kurve*, *Bogenlänge*, der Integralformel für Bogenlängen (im Falle stückweise stetig differenzierbarer Kurven) und der Monotonieeigenschaften des Integrals können stichhaltig begründete Antworten auf die Fragen (E1) und (E2) gegeben werden.

Zu (E1): Für eine durch

$$\begin{aligned} f : [0, 2\pi] &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (a \cos t, b \sin t) \end{aligned}$$

parametrisierte Ellipse mit den Halbachsen a und b drückt die Integralformel für Bogenlängen den Umfang durch das Integral

$$U = \int_0^{2\pi} \|f'(t)\| \, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 (\sin t)^2 + b^2 (\cos t)^2} \, dt$$

aus, das traditionell auch in die alternative Form

$$U = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) (\cos t)^2} \, dt$$

gebracht wird und als *elliptisches Integral* bekannt ist. Durch Abschätzen des Integranden erhält man (unter Ausnutzung der Monotonie des Integrals) die Ungleichung

$$U \geqslant 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, dt = 4a \, ,$$

und diese beantwortet, wie im vorigen Teilabschnitt erläutert, Frage (E1).

Bemerkung: Vielleicht ist es von Nutzen, kurz darauf einzugehen, warum ein solcher Nachweis der Ungleichung $U \geqslant 4a$ über das in Stufe 2 Gesagte hinaus überhaupt notwendig ist: Das dort zur Argumentation herangezogene Prinzip „Strecken sind die kürzesten Verbindungen" lässt sich auf Grundlage des in der Schule verwendeten intuitiven Kurvenbegriffs kaum weiter begründen. Man müsste dazu klären (durch Definition), was eine Kurve (als Konzept für „Verbindung") ist; dazu wiederum wäre eine Diskussion des Stetigkeitsbegriffs notwendig, um dann Bogenlängen einführen und handhaben zu können.

Zu (E2): Das elliptische Integral ist ein berühmtes Beispiel eines Integrals, das nicht mit Hilfe elementarer Funktionen auswertbar ist. Diese zunächst ungünstig erscheinende Lage lässt sich als Gelegenheit nutzen, einer eventuell zu starken Kalkülorientierung bei den Lernenden entgegenzuwirken: Obwohl sich das Integral nicht formelmäßig auswerten lässt, erweist es sich als Schlüssel zur argumentativen Lösung von (E2). Die Idee hierzu besteht darin, die Ungleichung

$$U \geqslant 2\pi\sqrt{ab} \tag{$*$}$$

für den Ellipsenumfang zu beweisen. Aus dieser folgt, dass Kreise maximalen Flächeninhalt unter allen umfangsgleichen Ellipsen haben. Bei der Ungleichung $(*)$ handelt es sich um einen Spezialfall der *isoperimetrischen Ungleichung* (die im folgenden Teilabschnitt näher beleuchtet wird). Sie lässt sich unter Nutzung des elliptischen Integrals beweisen (siehe dazu die Anleitung in der Aufgabenstellung im Anhang). Interessant ist, dass der naheliegende Ansatz, das Integral mittels der Standardabschätzung zu behandeln, nicht direkt zum Erfolg führt. Das raffinierte Argument, zum dem die Anleitung führt, ist stattdessen vom Beweis der isoperimetrischen Ungleichung adaptiert (siehe Aufgabenteil 3 in Abschn. 3).

Möglichkeiten zum Weiterarbeiten: Auch auf dieser Stufe sind viele weitere Aktivitäten möglich. Zum einen bietet es sich an, wie bereits auf Stufe 1, zusätzlich zu den in (R1) und (R2) bzw. (E1) und (E2) formulierten Problemen, die nach einem Maximum fragen, auch die Frage nach *Minima* zu bearbeiten. Ferner können drei- oder höherdimensionale Versionen der Probleme angegangen werden.

Stufe 4: Weiterführende Mathematik an der Universität

Die Fragen (R1) und (R2) sowie (E1) und (E2) finden eine Fortsetzung und Verallgemeinerung in der Differentialgeometrie. Was lässt sich sagen, wenn man anstelle von Rechtecken oder Ellipsen „beliebige" Kurven in Betracht zieht? Gibt es eine Kurve, bei der die „Umfangsausbeute" bzw. „Flächenausbeute" am größten ist? Wir fragen also:

(K1) Gibt es unter allen geschlossenen Kurven in der Ebene, die einen gegebenen Flächeninhalt einschließen, eine von größter Länge?
(K2) Gibt es unter allen geschlossenen Kurven in der Ebene, die eine gegebene Länge haben, eine, die den größten Flächeninhalt einschließt?

Frage (K1) ist rasch beantwortet, da sich bereits durch Rechtecke und Ellipsen beliebig große Umfänge bei konstantem Flächeninhalt realisieren lassen. Dagegen ist Frage (K2) tiefgehend und weitreichend: Sie ist als *isoperimetrisches Problem* bekannt und ihre Antwort liegt in der *isoperimetrischen Ungleichung*, einem der vermutlich ältesten globalen Sätze der Differentialgeometrie (vgl. Do Carmo 1983).

Zur genaueren Betrachtung ist zunächst zu klären, was in (K1) und (K2) unter einer „Kurve" überhaupt verstanden werden soll. Verschiedene Teilgebiete der Mathematik haben hierfür substantiell verschiedene Begriffe entwickelt, die den Fragestellungen und Methoden des jeweiligen Gebiets angepasst sind:

- In Topologie und Analysis spielt die Parametrisierbarkeit der betrachteten Punktmenge durch eine stetige bzw. durch eine stückweise stetig differenzierbare Funktion eine entscheidende Rolle und wird zur definierenden Eigenschaft erhoben (siehe z.B. Forster 2011)
- In der Algebraischen Geometrie verzichtet man auf die Existenz einer Parametrisierung und fordert stattdessen, dass sich die Punktmenge als Nullstellenmenge von Polynomfunktionen beschreiben lässt (siehe z.B. Fischer 1994).[7]

Die isoperimetrische Ungleichung entstammt der Differentialgeometrie und bezieht sich daher auf den analytischen Kurvenbegriff, speziell auf *einfach geschlossene* Kurven (bei denen Überkreuzungen nicht erlaubt sind). Sie besagt, dass für solche Kurven stets die Ungleichung

$$\ell^2 \geqslant 4\pi A$$

zwischen Länge ℓ und eingeschlossenem Flächeninhalt A besteht. Gleichheit gilt genau dann, wenn es sich bei der Kurve um einen Kreis handelt (für den Beweis siehe Do Carmo 1983, Abschn. 1.7). Damit folgt, dass der Kreis die Lösung des Extremwertproblems (K2) ist.

Dass Erkenntnisse auf höherer Stufe fruchtbare Rückwirkungen auf frühere Stufen haben können (Hefendehl-Hebeker 1995, Abschn. 2), zeigt zum Beispiel die Aufgabenstellung zum Dido-Problem aus Abschn. 2.2, die eine Wirkung *Stufe 4* $\rightarrow$ *Stufe 2* darstellt. Der Nachweis der Ungleichung $(*)$ im vorigen Teilabschnitt ist ein Beispiel für eine Wirkung *Stufe 4* $\rightarrow$ *Stufe 3*.

Möglichkeiten zum Weiterarbeiten: Es gibt eine Reihe von (auch mehrdimensionalen) Verallgemeinerungen des isoperimetrischen Problems, z.B. auf Hyperflächen in $\mathbb{R}^n$. Diese liegen für $n \geqslant 3$ hinsichtlich der Beweise und des begrifflichen Vorlaufs auf einer nochmals höheren Stufe (siehe z.B. Osserman 1978 oder Chavel 2001).

[7] Die beiden Perspektiven überlappen sich dort, wo glatte Kurven als 1-dimensionale Mannigfaltigkeiten aufgefasst werden.

3 Erarbeitung des Längsschnitts in einer Schnittstellenaufgabe zur Analysis

Wir betrachten nun eine Schnittstellenaufgabe zur Analysis, die zur Erarbeitung des im vorigen Abschnitt vorgestellten Längsschnitts anregt. Der Autor setzt diese in den Übungen zur Analysis-Vorlesung ein. Ein wesentliches Ziel der Aufgabe ist es, Bewusstsein dafür zu schaffen, dass eine mathematische Idee in ihrem Kern von der 5. Jahrgangsstufe bis zu weiterführenden Mathematikvorlesungen im Studium von Bedeutung sein kann. Naturgemäß werden in der vorliegenden Aufgabe nicht alle denkbaren Aspekte „abgearbeitet“. Ein Teil der Arbeitsaufträge wird als Basisaufgabe gestellt (in Abschn. 3.1 des Arbeitsbuchs Bauer 2012 mit vollständiger kommentierter Lösung), weitere Teile sind zum Weiterarbeiten vorgesehen und so gekennzeichnet.

Einordnung und Kontext: Die Aufgabe richtet sich an Studierende, die im Rahmen ihrer Analysis-Ausbildung die folgenden Vorkenntnisse erworben haben:

- die Begriffe Maximum, Minimum, Supremum, Infimum für reellwertige Funktionen,
- die Methoden der Bestimmung von Extrema mit den Mitteln der Analysis.

Zwei Aspekte werden als Lernziele vorab bekannt gegeben:

- Die Studierenden üben den Einsatz analytischer Methoden in einer elementargeometrischen Situation und lernen alternative Argumentationswege mit elementaren algebraischen Mitteln kennen.
- Sie erleben, wie elementargeometrische Fragestellungen schrittweise bis zu tiefergehenden Fragestellungen der Analysis und Differentialgeometrie führen können.

In der Kategorisierung aus Bauer (2012) bzw. Bauer (2013, Abschn. 2) handelt es sich um eine Aufgabe, die sich primär Kategorie C („Mit hochschulmathematischen Werkzeugen Fragestellungen der Schulmathematik vertieft verstehen“) zuordnen lässt.

Es folgen nun Kommentare zu den Aufgabenstellungen a) bis e) sowie zu den vier Arbeitsaufträgen 1) bis 3), die in Bauer (2012) unter der Überschrift „Zum Weiterarbeiten“ gegeben werden. Die Aufgabenstellungen selbst sind in Kästen angegeben.

Aufgabe: Beschränkte Funktionen und Extrema in der Geometrie

a) **Rechtecke mit gegebenem Flächeninhalt.** Für eine gegebene reelle Zahl $c > 0$ betrachten wir die Menge M_c aller Rechtecke in der Ebene $\mathbb{R}^2$, deren Flächeninhalt gleich c ist. Die Funktion $U : M_c \to \mathbb{R}$ ordne jedem solchen Rechteck seinen Umfang zu. Ist U nach oben beschränkt?

b) **Rechtecke mit gegebenem Umfang.** Nun betrachten wir für eine gegebene Zahl $c > 0$ die Menge N_c aller Rechtecke in $\mathbb{R}^2$, deren Umfang gleich c ist. Die Funktion $A : N_c \to \mathbb{R}$ ordne jedem solchen Rechteck seinen Flächeninhalt zu. Ist A nach oben beschränkt? Was ist ggf. das Supremum dieser Funktion? Ist es ein Maximum?

   Arbeiten Sie zwei Lösungswege aus: eine Lösung mit den Methoden der Analysis (Bestimmung von Extrema mittels Ableitungen) und eine Lösung, die mit Methoden der gymnasialen Mittelstufe (quadratische Funktionen) auskommt.

Aufgabenteil a): Rechtecke mit gegebenem Flächeninhalt. (*Stufe 1*) Die Frage nach der Beschränktheit von Umfang bei gegebenem Flächeninhalt in a) bzw. Flächeninhalt bei gegebenem Umfang in b) entsprechen den Fragen (R1) und (R2) und sollen die nachfolgenden Aufgabenteile in die angemessene Perspektive bringen. Sie dienen dazu, die geometrischen Abhängigkeiten der beteiligten Größen aufzuzeigen und die geometrische Intuition zu stärken. Insbesondere lässt sich so vielleicht der Gefahr vorbeugen, dass Lernende Flächenverwandlungsaufgaben (wie z.B. die in Abschn. 2 erwähnte Quadraturaufgabe) angehen, ohne ein Bewusstsein dafür zu haben, ob man intuitiv oder begründet erwarten kann, dass solche Verwandlungen überhaupt möglich sind.

Aufgabenteil b): Rechtecke mit gegebenem Umfang. (*Stufen 1 und 2*) Diese Standardaufgabe aus der Oberstufenanalysis wird, wie in Abschnitt 2 erläutert, als Illustrationsbeispiel einer einfachen Extremwertaufgabe gestellt. Neben einer analytischen Lösung (Stufe 2) wird explizit auch eine elementar-algebraische Lösung mit quadratischen Funktionen (Stufe 1) gefordert, um die argumentative Beweglichkeit der Studierenden zu fördern.

c) **Kreise.** Formulieren Sie die zu (a) und (b) analogen Fragen zu Kreisen statt Rechtecken. Warum sind diese Fragen nicht sinnvoll/interessant?

d) **Ellipsen.** Formulieren Sie analoge Fragen zu Ellipsen. Welche Antworten würden Sie intuitiv erwarten?

e) **Elliptisches Integral.** Verwenden Sie die Integralformel für Bogenlängen (siehe Forster 2011, §4, Satz 1), um zu zeigen, dass sich der Umfang einer Ellipse mit den Halbachsen a und b durch das Integral

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(\sin t)^2 + b^2(\cos t)^2}\, dt}$$

ausdrücken lässt. Zeigen Sie, dass dieses gleich dem sogenannten *elliptischen Integral*

$$\boxed{4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-(1-\frac{b^2}{a^2})(\cos t)^2}\, dt}$$

ist. (Es lässt sich nicht durch elementare Funktionen darstellen.) Nutzen Sie eine der Integraldarstellungen, um zu zeigen, dass es bei gegebenem Flächeninhalt Ellipsen von beliebig großem Umfang gibt.

Aufgabenteil c): Kreise. (*Stufe 1*) Vom höheren Standpunkt mag diese Frage banal erscheinen. Sie dient aber wie a) dazu, die nachfolgende Aufgabenstellung angemessen einzuordnen – hier in Bezug auf die vorhandenen „Freiheitsgrade“ für eine Extremwertbildung.[8] Vielleicht erkennen Studierende an dieser Stelle auch bereits, dass Kreise sich zu Ellipsen wie Quadrate zu Rechtecken verhalten und dass die zu a) und b) analogen Fragen für Kreise aus demselben Grund nicht sinnvoll sind wie sie auch für Quadrate nicht sinnvoll wären.

[8] Der im zugehörigen kommentierten Lösungsvorschlag in Bauer (2012) angedeutete Gesichtspunkt, ob noch ein „Parameter frei bleibt“, findet beispielsweise in der algebraischen Geometrie eine Vertiefung bei sogenannten „Dimensionszählungen“: Man vergleicht dabei die Dimension des fraglichen Parameterraums mit der Anzahl der in der Situation gestellten Bedingungen.

Aufgabenteil d): Ellipsen. (*Stufe 2*) Die Aufgabenstellung fordert zum eigenständigen Verallgemeinern auf und will die Lernenden dazu anleiten, selbst die Fragen (E1) und (E2) zu stellen. Daher wurde das Formulieren von Fragen und intuitiven Erwartungen hier bewusst als eigenständiger Aufgabenteil konzipiert – es soll vermittelt werden, dass diese nicht Beiwerk, sondern zentrale mathematische Aktivitäten sind.

Aufgabenteil e): Elliptisches Integral. (*Stufe 3*) Dieser Teil, in dem Frage (E1) gestellt wird, lässt sich im Anschluss an die Integrationstheorie bearbeiten. Auf der technischen Ebene übt er den Umgang mit Parametrisierungen und die Integralformel für Bogenlängen. Als Aspekt mathematischer Bildung macht er die Lernenden mit dem elliptischen Integral vertraut. Die Tatsache, dass sich aus dem nicht elementar auswertbaren Integral dennoch Nutzen ziehen lässt, zeigt, dass Integrale mehr sind als ihr numerischer Wert.

1) **Nach unten beschränkt?** In der Aufgabe wurde untersucht, ob die auftretenden Umfangs- und Flächenfunktionen nach *oben* beschränkt sind, und ggf. nach dem *Supremum/Maximum* gesucht. Ebenso natürlich ist es zu fragen, ob diese Funktionen nach *unten* beschränkt sind, und nach *Infimum/Minimum* zu suchen. Bearbeiten Sie diese Fragen.

2) **Drei- und höherdimensionale Versionen.** Spannend ist es auch, dreidimensionale Versionen der in dieser Aufgabe betrachteten Fragen zu untersuchen. Dabei kommen u. a. folgende Begriffe zum Einsatz:

Rechteck	$\rightsquigarrow$	Quader
Umfang	$\rightsquigarrow$	Oberfläche
Flächeninhalt	$\rightsquigarrow$	Volumen

Formulieren Sie solche Fragen und versuchen Sie, einige davon zu beantworten. Erkunden Sie auch, wie sich die Situation in höheren Dimensionen ($n > 3$) darstellt.

Zum Weiterarbeiten, Teil 1: Nach unten beschränkt? (*Stufen 1–4*) Diese Teilaufgabe fordert auf, Überlegungen zu Infima/Minima selbst anzustellen. Die Leistung liegt hier sowohl im Ausformulieren des zugehörigen Arbeitsplans als auch in der eigentlichen Durchführung.

Zum Weiterarbeiten, Teil 2: Drei- und höherdimensionale Varianten. (*Stufen 2 und 3*) Hier wird der Lernende dazu angeregt, selbst über mögliche höherdimensionale Versionen der bearbeiteten Fragestellungen nachzudenken. Der Auftrag ist so offen gehalten, dass auf verschiedenen Niveaustufen sinnvolle Aktivitäten möglich sind: Man kann nur den dreidimensionalen Fall betrachten oder aber beliebige n-dimensionale Situationen; man kann von Rechtecken auf Quader in $\mathbb{R}^n$ oder von Ellipsen auf Ellipsoide verallgemeinern.

3) **Ellipsen mit gegebenem Umfang.** In Aufgabenteil (3) wurde die Erwartung formuliert, dass unter allen Ellipsen mit gegebenem Umfang genau die Kreise den maximalen Flächeninhalt haben. Überlegen Sie sich, dass dies gezeigt ist, sobald man die nachfolgende Ungleichung für den Umfang einer Ellipse mit Halbachsen a und b gezeigt hat:

$$\boxed{U \geqslant 2\pi\sqrt{ab}}$$

Beweisen Sie dann diese Ungleichung. Hier ist ein Vorschlag für eine dazu mögliche Vorgehensweise:

(1) Wir gehen aus von der in Aufgabenteil (3) gefundenen Formel

$$U = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin(t)^2 + b^2 \cos(t)^2}\, dt$$

und beginnen mit dem Trick einer *Eins-Ergänzung*: Multiplizieren Sie den Ausdruck unter der Wurzel mit $\sin^2 + \cos^2$ und zeigen Sie dann, dass er durch $(a \sin^2 + b \cos^2)^2$ nach unten abgeschätzt werden kann.

(2) Nutzen Sie die gewonnene Abschätzung, um zu folgern, dass gilt

$$U \geqslant \int_0^{2\pi} a \sin(t)^2 + b \cos(t)^2 \, dt\,.$$

(3) Berechnen Sie nun das letztere Integral, um so zur behaupteten Ungleichung zu gelangen. (Tipp: Für beliebige nichtnegative Zahlen a, b gilt $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$)

Zum Weiterarbeiten, Teil 3: Ellipsen mit gegebenem Umfang. (*Stufe 3*) Hier wird der in Abschnitt 2 erläuterte Spezialfall der isoperimetrischen Ungleichung bewiesen, der (E2) beantwortet. Dazu gibt die Aufgabe einen Vorschlag für eine mögliche Vorgehensweise in drei Schritten vor. Diese sind vom Beweis der isoperimetrischen Ungleichung (wie etwa in Do Carmo 1983, Abschn. 1.7) motiviert – in der Tat enthält er die Kernidee der Abschätzungen, die für deren Beweis notwendig sind. Der Aufgabenteil bietet die Gelegenheit, den Studierenden einen Aspekt mathematischen Arbeitens aufzuzeigen (z.B. bei der Diskussion der Aufgabe im Tutorium unter der Leitfrage „Woher kommen die Ideen für die in (1)–(3) beschriebene Vorgehensweise?“): Viele der heute verfügbaren Ideen und Methoden in der Mathematik wurden im Laufe vieler Jahre oder Jahrzehnte gefunden bzw. entwickelt. Man erwartet als Mathematiker nicht, diese auf die Schnelle selbst nochmals zu erfinden, sondern lernt aus dem bereits Verfügbaren, um es selbst in neuen Situationen nutzen zu können. Vorlesungen zur Analysis bieten viele Beispiele für dieses Vorgehen: Zum Beispiel erleben Analysis-Lernende die Anwendung der Standardabschätzung

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leqslant (b - a) \cdot \sup |f|$$

in so vielen Beweisen, dass sie sie „reflexartig“ in analogen Situation anwenden werden, wo sie in der Tat oft zum Erfolg führt.

4) **Die isoperimetrische Ungleichung.** Dass Kreise den maximalen Flächeninhalt bei gegebenem Umfang haben, gilt erstaunlicherweise nicht nur unter allen Ellipsen, sondern sogar, wenn man „beliebige“ Kurven in Betracht zieht – es gilt die *isoperimetrische Ungleichung*:

   Satz. *Sei C eine einfach geschlossene ebene Kurve mit Länge ℓ, und sei A der Flächeninhalt des von C berandeten Gebiets. Dann gilt*

   $$\boxed{\ell^2 \geqslant 4\pi A\,,}$$

   und Gleichheit gilt genau dann, wenn C ein Kreis ist.

   Einen Beweis dieses Satzes (und eine Erklärung der verwendeten Begriffe) finden Sie in Do Carmo (1983). Die oben für Ellipsen gefundene Ungleichung $U \geqslant 2\pi\sqrt{ab}$ ist ein Spezialfall der isoperimetrischen Ungleichung.

Zum Weiterarbeiten, Teil 4: Die isoperimetrische Ungleichung. (*Stufe 4*) Dieser letzte Aufgabenteil gibt einen Ausblick in die Differentialgeometrie, der (K2) betrifft. Da sich nur ein kleiner Teil der Lehramtsstudierenden mit diesem Gebiet im Rahmen ihres Studiums befassen wird, nutzt die Aufgabe die Gelegenheit, Anregungen zu geben und Orientierungswissen zur Existenz eines solchen Resultats zu vermitteln.

4 Abschließende Bemerkungen

Die Bearbeitung eines solchen Längsschnitts wird hier mit der Absicht angeregt, bei den Lernenden Bewusstsein dafür zu schaffen, dass dieselbe mathematische Idee in ihrem Kern in verschiedenen Stufen von Bedeutung ist und in jeweils angepasster Tiefe und Weite untersucht werden kann. Die elementaren Stufen sind wichtig für die Motivation und das Verstehen der weitergehenden Stufen, während umgekehrt die höheren Stufen den Blick auf die elementaren Stufen in nützlicher Weise verändern und bereichern können. Bei der konkreten Umsetzung in eine Schnittstellenaufgabe waren dem Verfasser neben den fachlich-inhaltlichen Bezügen zwischen den verschiedenen Stufen auch die methodischen Bezüge wichtig: Dieselben professionstypischen Arbeitsweisen spielen auf verschiedenen Stufen des Mathematiktreibens eine wichtige Rolle – gleichgültig, ob sie auf elementarer Ebene oder in einer Forschungssituation angewendet werden: Experimentieren, Fragen stellen, Vermutungen aufstellen, Begründungen suchen (siehe Bauer 2012, Kap. 5). Nach Meinung des Autors lohnt sich der Versuch, in der Lehramtsausbildung Schul- und Hochschulmathematik auch unter diesem Aspekt in Verbindung zu bringen. Lehramtsstudierenden ist diese Perspektive nicht unbedingt selbstverständlich – häufig findet man stattdessen die Vorstellung einer Zuordnung

$$\begin{array}{rcl} \text{Schulmathematik} & \leftrightarrow & \text{Rechnen} \\ \text{Hochschulmathematik} & \leftrightarrow & \text{Beweisen} \end{array}$$

Die gemeinsamen Arbeitsweisen und das Bewusstsein für sie auszubilden war daher ein weiteres Ziel bei der Konzeption der Aufgabe. Die damit angestrebten Fähigkeiten der Studierenden lassen sich anhand der vorliegenden Aufgabe so konkretisieren:

(1) Fragen stellen. Studierende können auch in einfachen Fällen wie bei der Extremwertaufgabe zu Rechtecken die Existenz von Extrema in analytischen Begriffen (Grenzwert, Infimum, Supremum, beschränkte Funktion) ausdrücken, diese begründen, die Aufgabenstellung variieren und analoge Extremwertfragestellungen für Ellipsen selbst formulieren. Dies erfordert Fähigkeiten des Denkens in Begriffen der Analysis und in der präzisen Verwendung der Fachsprache.

(2) Intuition entwickeln. Die Studierenden entwickeln mathematische Intuition, die ihnen ermöglicht, zutreffende Erwartungen zu formulieren. Solche Intuition kann von mathematischer Erfahrung mit verwandten Situationen herrühren – hier etwa von früheren Analogieerfahrungen zwischen gerad- und krummlinigen Figuren.

(3) Bewusstsein für mathematische Wahrheitsfindung. Den Studierenden ist bewusst, dass für den Übergang von Intuition zu mathematischer Wahrheit Argumente innerhalb eines deduktiven Theoriegebäudes erforderlich sind, um die als Erwartung formulierten Aussagen nachzuweisen. Dies erfordert das Wissen, welche Schlussweisen in der Mathematik wahrheitsübertragend sind, d.h. wie in dieser Wissenschaft Wahrheit generiert/etabliert wird.

(4) Mathematische Argumentationen durchführen. In der vorliegenden Aufgabe bedeutet dies die Fähigkeit, nach einer gegebenen Argumentationsanleitung einen vollständigen Beweis der formulierten Aussage auszuführen. Auf der technischen Ebene erfordert dies Sicherheit beim Arbeiten mit Integralen und im elementar-algebraischen Rechnen, auf der motivationalen Ebene die Bereitschaft und das Interesse, aus den in der Anleitung enthaltenen Ideen Nutzen zu ziehen – für die aktuelle Aufgabe und für weitere Problemstellungen. Bei anderen Aufgaben könnte an dieser Stelle der Wunsch stehen, dass die Studierenden den Beweis vollständig selbst entwickeln. Welche Erwartung jeweils (im Durchschnitt der Studierenden) angebracht ist, ist selbstverständlich problemabhängig.

In (1) und (2) liegt der Schwerpunkt in Intuitions- und Kreativitätsleistungen sowie in der Nutzung der mathematischen Fachsprache, während (3) und (4) auf das Verstehen und Durchführen typisch mathematischer Argumentation abheben.

Eine Bemerkung zu der in (4) auftretenden Unterscheidung zwischen *Nachvollziehen* und *Selbst-Entwickeln*. Das in der Aufgabe geforderte Nachvollziehen ist nicht als „Notlösung bei zu schwerem Problem" zu verstehen. Vielmehr wird in der Praxis von forschenden Mathematikern jede der folgenden Tätigkeiten in der täglichen Arbeit benötigt und stellt eine substantielle mathematische Leistung dar:

- Nachvollziehen einer gegebenen Argumentation – um Arbeiten und Resultate anderer Forscher zu verstehen, um Ideen zu gewinnen und Techniken zu erarbeiten,
- Ausführen einer Argumentation, die in groben Zügen vorgegeben ist – etwa wenn für die eigene Arbeit Verallgemeinerungen von Resultaten anderer Mathematiker benötigt werden,
- eigenständiges Entwickeln von Argumentationen – als in diesem Zusammenhang „höchste Kunst", die aber ohne die beiden anderen Aktivitäten kaum denkbar ist.

Danksagung. Ich verdanke meinen Kollegen W. Gromes und U. Partheil wertvolle Anregungen bei der Konzeption der Schnittstellenaufgabe, die den Ausgangspunkt für diesen Artikel bildet.

Literatur

Andelfinger, B., Oettinger, E. (1976). *Mathematik, Geometrie I*. Freiburg: Herder.

Bauer, Th., Partheil, U. (2009). Schnittstellenmodule in der Lehramtsausbildung im Fach Mathematik. *Math. Semesterber.* 56, 85-103.

Bauer, Th. (2012). *Analysis – Arbeitsbuch. Bezüge zwischen Schul- und Hochschulmathematik, sichtbar gemacht in Aufgaben mit kommentierten Lösungen.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Bauer, Th. (2013). Schnittstellen bearbeiten in Schnittstellenaufgaben. In: Ableitinger, Ch., Kramer, J., Prediger, S. (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Beutelspacher, A., Danckwerts, R., Nickel, G., Spies, S., Wickel, G. (2011). *Mathematik Neu Denken. Impulse für die Gymnasiallehrerbildung an Universitäten*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Bildungsserver Hessen (2012). *Der Soma-Würfel.* http://lernarchiv.bildung.hessen.de /grundschule/Mathematik/Geometrie/koerper/soma/index.html

Chavel, I. (2001). *Isoperimetric inequalities. Differential geometric and analytic perspectives.* Cambridge Tracts in Mathematics 145. Cambridge: Cambridge University Press.

Danckwerts, R., Vogel, D. (1997). Ein Blick in die Geschichte: Euklid. *mathematik lehren* 81, 17-20.

Danckwerts, R., Vogel, D. (2001). Der Themenkreis Extremwertprobleme: Wege der Öffnung. *Der Mathematikunterricht* Nr. 4, 2001.

Danckwerts, R., Vogel, D. (2005). *Analysis verständlich unterrichten*. Hildesheim: Spektrum.

Do Carmo, M. (1983). *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen.* Wiesbaden: Vieweg.

Feuerlein, C., Rieger, M. (2009). *Mathematik 5.* München: Bayerischer Schulbuch-Verlag.

Feuerlein, R., Distel, B. (2007). *Mathematik 9.* München: Bayerischer Schulbuch-Verlag.

Fischer, G. (1994). *Ebene algebraische Kurven*. Wiesbaden: Vieweg.

Forster, O. (2011). *Analysis 2. Differentialrechnung im* $\mathbb{R}^n$*, gewöhnliche Differentialgleichungen*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Hefendehl-Hebeker, L. (1995). Mathematik lernen für die Schule? *Mathematische Semesterberichte* 42, 33-52.

Hefendehl-Hebeker, L. (2002). *Maße und Funktionen im Geometrieunterricht der Sekundarstufe I.* Augsburg: Wißner-Verlag.

Hefendehl-Hebeker, L. (2013). Doppelte Diskontinuität oder die Chance der Brückenschläge. In: Ableitinger, Ch., Kramer, J., Prediger, S. (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung* (S. 1-15). Heidelberg: Springer Spektrum.

Klein, F. (1924). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte, Bd. 1.* Springer: Berlin.

Lambacher Schweizer (2001). *Analysis Leistungskurs Gesamtband. Mathematisches Unterrichtswerk für das Gymnasium. Ausgabe A.* Stuttgart: Klett.

Osserman, R. (1978). The isoperimetric inequality. *Bull. Amer. Math. Soc.* 84, 1182-1238.

Rademacher, H., Toeplitz, O. (1930). *Von Zahlen und Figuren.* Berlin: Springer.

Stowasser, R. (1976). Extremale Rechtecke – eine Problemsequenz mit Kurzfilmen. *Der Mathematikunterricht* 22, Heft 3, S. 12-23.