



Erschienen in: A. Hoppenbrock et al. (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase, Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik* (pp. 483–499)  
Springer Fachmedien Wiesbaden 2016

# Mathematik verstehen von verschiedenen Standpunkten aus – Zugänge zum Krümmungsbegriff

Thomas Bauer, Wolfgang Gromes, Ulrich Partheil

Fachbereich Mathematik und Informatik, Philipps-Universität Marburg, Hans-Meerwein-Straße, 35032 Marburg, E-Mail: [tbauer@mathematik.uni-marburg.de](mailto:tbauer@mathematik.uni-marburg.de), [gromes@mathematik.uni-marburg.de](mailto:gromes@mathematik.uni-marburg.de), [partheil@mathematik.uni-marburg.de](mailto:partheil@mathematik.uni-marburg.de)

Es wird weithin davon ausgegangen, dass Lehramtsstudierende der Mathematik auf der fachinhaltlichen Seite ausreichend (oder gar »mehr als ausreichend«) für schulmathematische Erfordernisse gerüstet seien. An Beispielen wie dem Krümmungsbegriff lässt sich jedoch erkennen, dass diese Annahme nicht uneingeschränkt richtig ist: Wenn der zu einem Konzept als fachlich adäquat angesehene Standpunkt *über* dem im Lehramtscurriculum Erreichbaren liegt, dann kommen Lehramtsstudierende mit diesem Gegenstand in der Regel überhaupt nicht in Berührung und sind daher hierfür fachlich nicht vorbereitet. Wir betonen in diesem Text die Notwendigkeit, in solchen Situationen Zugänge auf elementaren Stufen zu finden. Dies konkretisieren wir am Beispiel des Krümmungsbegriffs und zeigen die Fruchtbarkeit der vorgestellten Zugänge für Schnittstellenaktivitäten.

## 1 Zugänge auf elementaren Stufen finden

**Der Ausgangspunkt: Analyse einer Schülerfrage.** In der gymnasialen Oberstufe ist es üblich, den Graphen einer differenzierbaren Funktion *links-* bzw. *rechtsgekrümmt* zu nennen, wenn die Ableitung der Funktion monoton steigend bzw. fallend ist. Ist die Funktion zweimal differenzierbar, dann wird die zweite Ableitung herangezogen, um über die Links- bzw. Rechtsgekrümmtheit einer Funktion (eventuell auf gewissen Teilintervallen) zu entscheiden. Katrin, Schülerin in einem Leistungskurs Mathematik, macht in diesem Kontext eine sie überraschende Beobachtung:

»Bei der Parabelfunktion  $x \mapsto x^2$  ist die zweite Ableitung überall positiv und man sieht auch »optisch«, dass der Graph linksgekrümmt ist – das passt ja zusammen. Eines verstehe ich aber nicht: Man sieht doch am Graphen, dass die Krümmung immer weniger wird, je größer man  $x$  macht – aber die zweite Ableitung ist überall gleich. Wie passt denn das zusammen?«

Was führt Katrin zu ihrer Frage? Wir versuchen eine Deutung: Katrin hat die Erfahrung gemacht, dass die Ableitungen  $f'$  und  $f''$  einer zweimal differenzierbaren Funktion  $f$  qualitative Aussagen über geometrische Eigenschaften des Graphen  $G_f$  erlauben (Steigungs- bzw. Krümmungsverhalten). Da  $f'$  auch eine *quantitative* Interpretation besitzt (Steigung), ist die Analogievermutung naheliegend, dass  $f''$  ein Maß für die Krümmung ist. Obwohl der Krümmungsbegriff im Unterricht üblicherweise nicht explizit behandelt wird (Ausnahmen bilden z.B. die Unterrichtswerke Kroll 1985 und Schmidt et al. 2010), verfügen viele Schüler durchaus über ein Präkonzept von Krümmung – im Sinne einer intuitiven Vorstellung von »Stärke des Gekrümmtseins«. So formulieren Schüler, dass eine Kreislinie »überall gleich stark gekrümmt« ist, während der Graph der Exponentialfunktion »immer weniger gekrümmt« erscheint, je weiter man sich auf dem Funktionsgraphen nach rechts bewegt. Dass Katrin der zweiten Ableitung die Rolle des Krümmungsmaßes zuschreibt, ist umso verständlicher, als die korrekte Grundvorstellung von  $f''$  als lokale Änderungsrate von  $f'$  geometrisch unsichtbar bleibt.

Katrins Frage nach dem »Zusammenpassen« sollte im Unterricht als berechtigt und sehr willkommen aufgenommen werden. In der Tat sehen wir das Einfordern solcher Passungen durchaus als soziomathematische Norm im Sinne von Yackel und Cobb (1996), die die Lehrperson in der Interaktion mit den Schülern entwickeln und als Repräsentant der mathematischen Fachgemeinschaft bewusst vertreten sollte (vgl. Kazemi und Stipek 2001).

**Die Lage der Studierenden – die Situation im Lehramtsstudium.** Wir haben Katrins Frage Lehramtsstudierenden aus den Fachsemestern 5–11 vorgelegt (als *Unterrichtsmoment* im Sinne von Prediger 2013) und festgestellt, dass es praktisch keinem der befragten Studierenden gelingt, auf Katrins Frage adäquat zu antworten (vgl. die »job analysis« von Ball und Bass 2000). Dieser Befund kann im Grunde nicht überraschen: In den Grundvorlesungen zur Analysis wird der Krümmungsbegriff üblicherweise nicht thematisiert. Eine der Ursachen hierfür liegt vermutlich darin, dass der als fachlich adäquat angesehene Standpunkt<sup>1</sup> für das Krümmungskonzept in der Differentialgeometrie liegt. Daher wird dessen elementare Behandlung unter den Nebenbedingungen eines gedrängten Analysis-I/II-Curriculums in der Regel nicht vorgesehen. (Eine Ausnahme in der Lehrbuchliteratur bildet Hildebrandt 2008, Abschn. 2.2.) Da die Differentialgeometrie aber im gymnasialen Lehramtsstudiengang allenfalls einen optionalen Studienanteil darstellt, werden Lehramtsstudierende dem quantitativen Krümmungsbegriff in ihrem Studium in der Regel nicht begegnen.

**Anforderungen im Lehrerberuf.** Das Beispiel des Krümmungsbegriffs stellt keinen singulären Fall dar – immer wieder kommen Lehrer in Situationen, die

---

<sup>1</sup> Wir meinen damit den durch Abstraktionsebene und Argumentationsbasis charakterisierten Ort, an dem der fragliche Inhalt so beschrieben und untersucht werden kann, dass ein Maximum an Einsicht bei möglichst hoher fachlicher Ökonomie erreicht wird.

mathematische Kenntnisse erfordern, welche sie im Studium so nicht erworben haben. Unabhängig von der berechtigten Forderung nach einer breiten Ausbildung der Lehramtsstudierenden auf elementarmathematischem Niveau (vgl. Müller, Steinbring und Wittmann 2002) kann kein Studium so umfassend sein, dass »alle« zukünftigen Situationen erfasst werden – wünschenswerte Wahlmöglichkeiten der Studierenden aus dem Studienangebot, die Weiterentwicklung des fachlichen Forschungsstands, sowie wechselnde fachliche und curriculare Trends an Schule und Universität sind nur einige der Gründe hierfür.

Wie schwierig es dem Einzelnen in einer gegebenen Situation fällt, sich Inhalte selbst zu erarbeiten, hängt u.a. davon ab, auf welcher Niveaustufe der zugehörige fachübliche Standpunkt liegt und ob elementare Zugänge bereits entwickelt wurden. Dennoch bleibt es der Anspruch an Mathematiklehrende, »jedes« Thema auch auf elementaren Stufen verfügbar zu machen, dabei fachlich korrekt vorzugehen und bei Lernenden adäquate Grundvorstellungen auszubilden (vgl. Bruner 1980).

**Ziel dieses Texts.** Wir möchten in diesem Text am Beispiel des Krümmungsbegriffs aufzeigen, wie sich ein fachlich auf höherer Stufe verortetes Konzept auf verschiedenen elementaren Stufen behandeln lässt. Dabei haben wir folgende Aspekte im Blick:

- **Elementarität.** Die Zugänge sollen geringen begrifflichen Vorlauf haben, damit sie in frühem Stadium des universitären Studiums (z.B. in einem Proseminar) oder im Selbststudium einen schnellen Weg zum Krümmungsbegriff bahnen.
- **Fachlicher Anschluss.** Die Zugänge müssen in logischer Hinsicht zum selben Konzept führen wie der differentialgeometrische Zugang – die Vereinfachung darf nicht darin bestehen, dass ein *anderer* Begriff betrachtet wird.
- **Grundvorstellungen.** Die Zugänge müssen mit adäquaten Grundvorstellungen zum Krümmungsbegriff verbunden sein. Ein zwar in logischer Hinsicht zulässiger Weg, in dem sich die Vorstellung vom »Gekrümmtsein« aber nicht unmittelbar wiederfindet, würde uns nicht ausreichen.

Wir sehen unseren Text zum einen zur konkreten Verwendung in einer *Schnittstellenaktivität* im Sinne von Bauer und Partheil (2009) und Bauer (2013) in Ergänzung zu Bauer (2012). Zum anderen soll er über das konkrete Beispiel des Krümmungsbegriffs hinaus als generelle Anregung für den Umgang mit nicht studierten Inhalten dienen.

Verschiedene Autoren haben sich bereits auf elementarer Stufe mit dem Krümmungsbegriff befasst (u.a. Steinberg 1985, Henn 1997, Geisreiter 2004 und Borges 2012). Der Schwerpunkt unseres Texts liegt darin, zu zeigen, wie man verschiedenartige intuitive Vorstellungen von »Gekrümmtsein« aufgreifen, aus diesen jeweils (z.T. neue) Zugänge zum Krümmungsbegriff bilden und die dabei

eingeschlagenen Wege konsistent und ohne Brüche bis zur Krümmungsformel gehen kann.

Wir betrachten in Abschnitt 2 zunächst Zugänge, die auf der Idee des *Krümmungskreises* beruhen, in Abschnitt 3 dann Zugänge über *Krümmungsdreiecke* und in Abschnitt 4 Zugänge von höherem Standpunkt (Tangenten- bzw. Winkeländerung) sowie die Verbindung zur Flächentheorie. Schließlich erörtern wir in Abschnitt 5 Unterschiede und Bezüge zwischen den Zugängen in fachlicher und in fachdidaktischer Hinsicht. Es zeigt sich insbesondere, dass unterschiedliche Grundvorstellungen aufgebaut werden können. Interessant ist, dass deutlich verschiedene Anfangsvorstellungen zu einem übereinstimmenden Krümmungsbegriff führen, wobei die Durchführung mit unterschiedlichen, sowohl elementaren als auch fortgeschritteneren Werkzeugen und Methoden aus je verschiedenen Bereichen der Mathematik erfolgt. Diese Vielfalt ermöglicht Lehrenden insbesondere, eine für die jeweilige Lerngruppe passende Auswahl zu treffen.

## 2 Zugänge zum Krümmungsbegriff über den Krümmungskreis

### 2.1 Die Idee des Krümmungskreises

Von den möglichen Zugängen betrachten wir in diesem Abschnitt zunächst diejenigen, die Krümmung unter Rückgriff auf den *Krümmungskreis* definieren und dabei wie folgt vorgehen:

- **Schritt 1: Krümmung von Kreisen.** Beim Steigungsbegriff betrachtet man zuerst diejenigen Kurven, die man intuitiv als »überall von gleicher Steigung« ansieht, also Geraden. Analog liegt es nahe, für den Krümmungsbegriff zunächst solche Kurven zu betrachten, die intuitiv »überall gleich gekrümmt« sind, also Kreise. Wählt man das Reziproke  $1/r$  des Radius als Krümmungsmaß, so sind geometrisch naheliegende Forderungen erfüllt: Kreise von kleinem Radius haben größere Krümmung als Kreise von großem Radius. Für  $r \rightarrow \infty$  geht die Krümmung gegen Null (der Kreis nähert sich einer Geraden an), während für  $r \rightarrow 0$  die Krümmung gegen Unendlich geht.
- **Schritt 2: Approximation von Kurven durch Kreise.** Die Steigung einer beliebigen differenzierbaren Kurve wird als die Steigung einer möglichst gut (d.h. linear) approximierenden Gerade definiert. Analog wird die Krümmung einer zweimal differenzierbaren Kurve als die Krümmung eines lokal möglichst gut (d.h. quadratisch) approximierenden Kreises definiert.

**Experimente mit dynamischen Geometriewerkzeugen.** Um den Krümmungsbegriff anzubahnen und insbesondere, um erste Erfahrungen und Ideen zur quantitativen Fassung der intuitiven Vorstellung von »Gekrümmtsein« zu gewinnen,

eignen sich beispielsweise Experimente mit dynamischen Geometriewerkzeugen. Ein Auszug aus einem dazu denkbaren Arbeitsauftrag für Schüler, denen ein Geogebra-Arbeitsblatt zur Verfügung gestellt wird:

Geogebra stellt den Befehl `Krümmungskreis[ <Punkt> , <Funktion> ]` zur Verfügung – dieser „Krümmungskreis“ soll untersucht werden. Im vorliegenden Geogebra-Arbeitsblatt ist er an der Sinusfunktion im Punkt  $P$  dargestellt. Bewegen Sie  $P$  auf dem Graphen der Funktion und beobachten Sie u.a.:

- a) An welchen Stellen ist der Krümmungskreisradius am kleinsten? Welchen Wert hat er hier?
- b) An welchen Stellen „springt“ der Krümmungskreis auf die „andere Seite“ des Funktionsgraphen?  
Können Sie diese Stellen (mit Mitteln der Analysis bzw. der Kurvendiskussion) charakterisieren?

Ändern Sie den Funktionsterm zu  $x^3 - 2x^2$  und auch zu  $x^4$  und untersuchen Sie auch hier die oben gestellten Fragen. Welchen Zusammenhang zwischen dem Krümmungskreis und dem intuitiven Begriff „Krümmung“/„gekrümmt“ vermuten Sie?

Die Bildung des Krümmungskreises zu gegebenen Kurvenpunkt wird hierbei als „Geogebra-Internum“ verborgen. Wenn die Vorstellung gefestigt ist, dass dessen Radius sich gegenläufig zur Stärke einer intuitiv verstandenen Krümmung verhält, ist die Frage zu klären, wie der Krümmungskreis definiert und berechnet werden kann („black-box-white-box-Prinzip“, vgl. Buchberger 1990).

## 2.2 Krümmungskreis – geometrischer Zugang

Der Gedanke, den Krümmungskreis als Grenzwert von »Sekantenkreisen« (oder: Drei-Punkte-Kreisen) zu beschreiben, wird häufig als motivierende Idee zum Einstieg genannt, dann aber meist zugunsten anderer (z.B. analytischer) Vorgehensweisen nicht konsequent weiter verfolgt. Wir sehen ihn dagegen als eigenständigen Zugang und zeigen in diesem Abschnitt, wie er sich mit geometrischer Argumentation bis zur Krümmungsformel durchführen lässt.

Zu gegebener zweimal differenzierbarer Funktion  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  auf einem Intervall  $I \subset \mathbf{R}$  und gegebener Stelle  $p \in I$  betrachten wir zwei weitere Stellen  $q, r \in I$ . Durch die drei Punkte

$$P = (p, f(p)), \quad Q = (q, f(q)), \quad R = (r, f(r))$$

geht genau ein Kreis  $K_{p,q,r}$  (wobei wir im Falle kollinearere Punkte eine Gerade als degenerierten Kreis akzeptieren). Die Idee ist, die Punkte  $Q$  und  $R$  gegen  $P$  gehen zu lassen und zu zeigen, dass sich dabei der Kreis  $K_{p,q,r}$  einer Grenzlage nähert. Wir zeigen:

**Satz.** Gilt  $f''(p) \neq 0$  so konvergieren für  $(q,r) \rightarrow (p,p)$  die Kreise  $K_{p,q,r}$  gegen einen Kreis  $K_p$ , der durch  $P$  geht. Sein Mittelpunkt ist

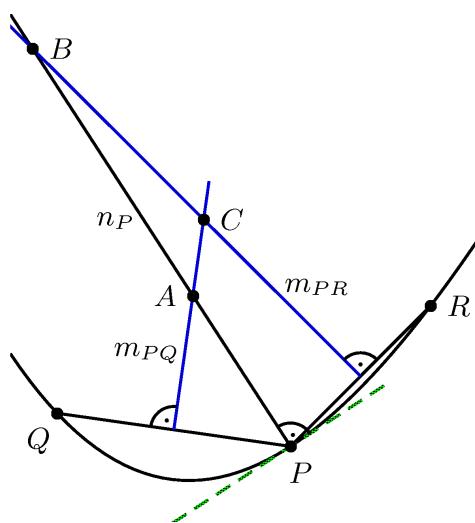
$$(p, f(p)) + \frac{1 + f'(p)^2}{f''(p)} \cdot (-f'(p), 1)$$

Den gefundenen Kreis  $K_p$  nennen wir den *Krümmungskreis* an  $f$  in  $p$  und seinen (mit Vorzeichen versehenen) Radius

$$\frac{(1 + f'(p)^2)^{3/2}}{f''(p)} \quad (\text{R})$$

den *Krümmungsradius*. Für die Krümmung von  $f$  in  $p$  erhalten wir so die *Krümmungsformel*

$$\kappa(p) = \frac{f''(p)}{(1 + f'(p)^2)^{3/2}} \quad (\text{K})$$



*Beweis.* Eine naheliegende Strategie besteht darin, den Mittelpunkt des Kreises  $K_{p,q,r}$  als Schnittpunkt  $C$  der Mittelsenkrechten  $m_{PQ}$  und  $m_{PR}$  der Strecken  $\overline{PQ}$  bzw.  $\overline{PR}$  zu bestimmen (siehe Abbildung) und dann an ihm den Grenzübergang  $(q,r) \rightarrow (p,p)$  vorzunehmen. Dieser Weg ist durchführbar und liefert in der Tat den behaupteten Kreis als Grenzwert. Wir beschreiben hier einen alternativen Weg, bei dem die erforderlichen Rechnungen durch etwas höheren argumentativen Einsatz wesentlich erleichtert

werden. Die Idee liegt darin, die Normale  $n_P$  im Punkt  $P$  (Senkrechte zur Tangente) in die Argumentation einzubeziehen. Wir werden zeigen:

- (\*) Die Schnittpunkte  $A := m_{PQ} \cap n_P$  und  $B := m_{PR} \cap n_P$  konvergieren für  $(q,r) \rightarrow (p,p)$  gegen denselben Punkt  $S$ .

Gilt dies, dann konvergiert auch der Schnittpunkt  $C := m_{PQ} \cap m_{PR}$  gegen  $S$ , denn das Dreieck  $ABC$  ist bei  $C$  stumpfwinklig (wenn  $Q$  und  $R$  nahe genug an  $P$  liegen)

und daher ist der Abstand von  $A$  und  $C$  kleiner als der von  $A$  und  $B$ . Der Punkt  $S$  ist demnach der gesuchte Krümmungskreismittelpunkt. Den Nachweis von (\*) führen wir für den Fall durch, dass  $P = (0, 0)$  ist (was wir durch eine Verschiebung, die die Satzaussage invariant lässt, immer erreichen können). Dann ist

- die Normale  $n_P = \mathbf{R} \cdot (-f'(0), 1)$ , und
- die Mittelsenkrechte  $m_{PQ} = \frac{1}{2}(q, f(q)) + \mathbf{R} \cdot (-f(q), q)$ .

Zur Bestimmung des Schnittpunkts suchen wir  $s, t \in \mathbf{R}$  mit

$$\frac{1}{2}(q, f(q)) + t \cdot (-f(q), q) = s \cdot (-f'(0), 1).$$

Löst man diese Gleichung auf (am einfachsten bildet man dazu zunächst das Skalarprodukt mit  $Q$ ), so erhält man

$$s = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2 + f(q)^2}{-f'(0)q + f(q)}.$$

Durch zweimalige Anwendung der Regel von l'Hospital folgt nun, dass dieser Ausdruck für  $q \rightarrow 0$  gegen  $\frac{1+f'(0)^2}{f''(0)}$  konvergiert. Und dies impliziert, dass der Schnittpunkt  $s \cdot (-f'(0), 1)$  gegen

$$\frac{1+f'(0)^2}{f''(0)} \cdot (-f'(0), 1)$$

konvergiert. Damit ist (\*) bewiesen. □

Die Idee dieses Beweises lässt sich mit dynamischer Geometriesoftware auch in der Schule illustrieren.

**Bemerkung.** Den im Satz ausgeschlossenen Fall  $f''(p) = 0$  kann man dadurch berücksichtigen, dass man als Krümmungskreis in diesem Fall eine Gerade als entarteten Fall eines Kreises (von »unendlichem Radius«) zulässt. Dies entspricht geometrischer Beobachtung: An Beispielen wie der Sinusfunktion sieht man, wie die Radien der Krümmungskreise bei Annäherung an einen Wendepunkt gegen unendlich gehen.<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup> Die entsprechende Überlegung kann man auch bei den übrigen vorgestellten Zugängen anstellen. Wir werden dies daher nicht in jedem Fall betonen.

## 2.3 Krümmungskreis – analytischer Zugang

Aus analytischer Perspektive lässt sich der Krümmungskreis durch die Bedingung des Übereinstimmens bis zur zweiten Ableitung definieren. Dieser Zugang ist der in der Literatur am weitesten verbreitete (siehe z.B. Steinberg 1985 oder Henn 1997, S. 90). Wir führen den Beweis daher hier nicht aus.

**Satz.** Sei  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  eine zweimal differenzierbare Funktion auf einem reellen Intervall  $I$  und sei  $p \in I$  ein Punkt, für den  $f''(p) \neq 0$  gilt. Dann gibt es genau einen Halbkreis  $x \mapsto (x, k(x))$  mit den Eigenschaften

$$k(p) = f(p), \quad k'(p) = f'(p), \quad k''(p) = f''(p) \quad (1)$$

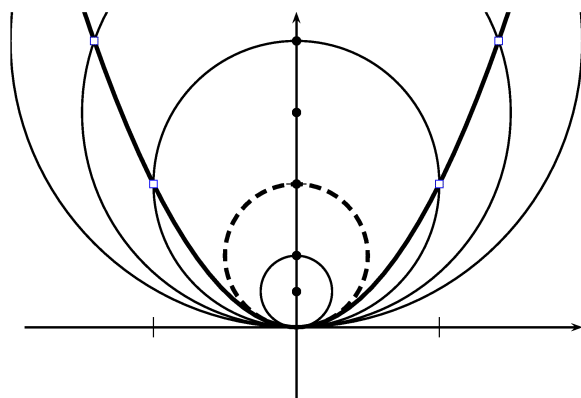
Sein Radius ist durch die Formel (R) aus Abschnitt 2.2 gegeben.

Als Krümmung erhalten wir aus dem Radius wieder den in (K) angegebenen Wert.

Die geometrische Interpretation dieses Zugangs wird mit Hilfe des Satzes von Taylor deutlich: Krümmungskreis und Funktion sind in  $p$  *tangential von 2. Ordnung*, d.h. es gilt

$$f(x) - k(x) = r(x) \cdot (x - p)^2$$

mit einer Funktion  $r$  für die  $r \rightarrow 0$  gilt.



Die nebenstehende Abbildung illustriert die geometrische und die analytische Perspektive am Beispiel der Normalparabel. Der Krümmungskreis (gestrichelt) ist der Grenzkreis, bei dem die drei Schnittpunkte zusammenfallen. Er erfüllt die Bedingungen (1), während bei den größeren und bei den kleineren Kreisen  $k''(p) \neq f''(p)$  ist.

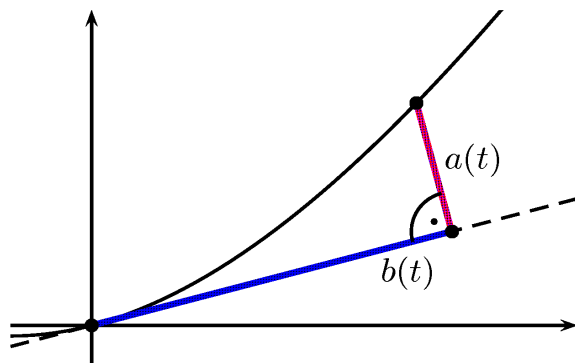
## 3 Zugänge zum Krümmungsbegriff über Krümmungsdreiecke

Wir stellen nun Zugänge vor, die die Krümmung nicht unter Rückgriff auf den Krümmungskreis definieren, sondern auf direkterem Wege durch Grenzwerte von Seitenverhältnissen in gewissen Dreiecken. Wir nennen diese Dreiecke *Krüm-*



*mungsdreiecke* und sehen sie als Analoga zu den Steigungsdreiecken, die der Definition der Ableitung zugrunde liegen. Unseres Wissens wurden solche Zugänge in der Literatur bislang nicht betrachtet.

Wir gehen von der geometrischen Vorstellung aus, dass Krümmung ein Maß für die Abweichung  $a(t)$  einer Kurve von der Tangente oder Sekante relativ zum



Tangentenabschnitt bzw. Sekantenabschnitt  $b(t)$  ist. In dynamischer Sichtweise ist dies die Abweichung von der geradlinigen Bewegung. Der Quotient  $a(t)/b(t)$  beschreibt diese Abweichung nicht adäquat, denn schon einfache Beispiele wie der Graph von  $x \mapsto x^2$  zeigen, dass er immer gegen Null konvergiert.

Wir betrachten stattdessen den Grenzwert des Quotienten

$$\frac{2 a(t)}{b(t)^2} \quad (2)$$

für  $t \rightarrow 0$ . Motiviert wird dies durch die Festlegung, dass ein Kreis mit Radius  $r$  die Krümmung  $1/r$  erhalten sollte: Ist

$$t \mapsto \left( t, r - \sqrt{r^2 - t^2} \right), \quad t \in ]-r, r[$$

der untere Halbkreis, so erhält man im Nullpunkt mit der Regel von l'Hospital

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{2a(t)}{b^2(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \left( r - \sqrt{r^2 - t^2} \right)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t}{\sqrt{r^2 - t^2}} \cdot \frac{1}{2t} = \frac{1}{r}$$

Wir zeigen im Folgenden, dass der Quotient in (2) stets konvergiert und damit eine von den bisherigen Zugängen unabhängige Definition des Krümmungsmaßes liefert. Im Spezialfall eines Funktionsgraphen ergibt sich überdies wieder die Formel (K) aus Abschnitt 2.2.

### 3.1 Der Tangenzugang

Wir führen nun den oben bereits angedeuteten Tangenzugang aus und skizzieren dann weitere Dreieckszugänge. Zur Vereinfachung der Darstellung betrachten wir in diesem und im nächsten Abschnitt statt eines Funktionsgraphen eine zweimal stetig differenzierbare reguläre Kurve  $c: I \rightarrow \mathbf{R}^2$ ,  $t \mapsto c(t)$ , auf einem reellen Intervall  $I \subset \mathbf{R}$ . (Dabei bedeutet *regulär*, dass  $c'(t) \neq 0$  für alle  $t$  gilt.) Es bezeichnet  $\langle a|b \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2$  das kanonische Skalarprodukt zweier Vektoren in  $\mathbf{R}^2$  und  $\|a\|$  die Länge (Norm) von  $a$ . Mit

$$n := \frac{1}{\|c'(0)\|} (-c'_2(0), c'_1(0)) \quad (3)$$

wird der orientierte Einheitsnormalenvektor und mit  $v := c'(0)/\|c'(0)\|$  der Einheitstangentialvektor an  $c$  in Null bezeichnet. Wir betrachten die Krümmung stets im Kurvenpunkt  $c(0)$  und setzen  $c(0) = 0$  voraus. Die Abweichung  $a(t)$  ist dann durch das Skalarprodukt  $\langle c(t)|n \rangle$  gegeben und der Tangentenabschnitt  $b(t)$  durch  $\langle c(t)|v \rangle$ . Wir zeigen:

**Satz. Der Quotient**

$$\frac{2\langle c(t)|n \rangle}{\langle c(t)|v \rangle^2} \quad (T)$$

konvergiert für  $t \rightarrow 0$  gegen den Wert

$$\frac{\langle c''(0)|n \rangle}{\|c'(0)\|^2} \quad (K_1)$$

*Beweis.* Einmalige Anwendung der Regel von l'Hospital ergibt

$$\frac{\langle c'(t)|n \rangle}{\langle c(t)|v \rangle \langle c'(t)|v \rangle} \quad (T^\dagger)$$

und die nochmalige Anwendung führt unter Verwendung von  $c(0) = 0$  zu  $(K_1)$ .  $\square$

Ist speziell  $c$  ein Funktionsgraph  $x \mapsto (x, f(x))$ , so ist

$$n = \frac{1}{\|(1, f'(0))\|} (-f'(0), 1).$$

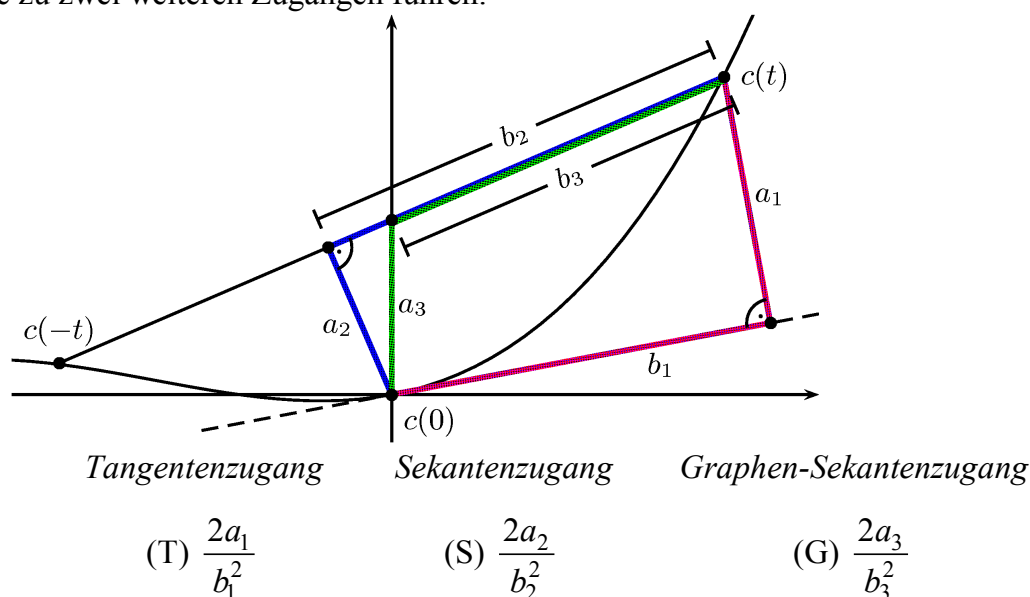
Die *allgemeine Krümmungsformel* ( $K_1$ ) spezialisiert sich daher bei Funktionsgraphen auf die aus Abschnitt 2 bekannte Krümmungsformel (K). Damit ist die überraschende Tatsache bewiesen, dass das Verhältnis  $2a/b^2$  aus dem Tangentendreieck zum selben Krümmungsmaß führt wie die Zugänge aus Abschnitt 2.

### 3.2 Weitere Dreieckszugänge

Das Prinzip, Krümmung als Grenzwert von Quotienten der Form

$$\frac{\text{Abweichung}}{\text{Abschnitt}^2}$$

zu erhalten, erweist sich als überraschend stabil gegenüber Variationen in der Definition des Krümmungsdreiecks. Aus dem nachfolgenden Bild ersieht man neben dem in Abschnitt 3.1 betrachteten Tangenten-Krümmungsdreieck zwei Varianten, die zu zwei weiteren Zugängen führen:



Dabei wird im Graphen-Sekantenzugang vorausgesetzt, dass die Kurve  $c$  ein Funktionsgraph  $x \mapsto (x, f(x))$  ist.

**Satz.** In allen drei Zugängen konvergiert der Quotient  $2a_i/b_i^2$  gegen das durch ( $K_1$ ) bzw. (K) gegebene Krümmungsmaß.

Für (T) wurde der Nachweis im vorigen Abschnitts bereits erbracht. Wir geben noch an, wie der Beweis für den Sekantenzugang (S) geführt werden kann: Sind  $v_s(t)$  und  $n_s(t)$  der Einheitssekantenvektor bzw. der Einheitsnormalenvektor zur Sekante, so gilt

$$\frac{2a_2}{b_2^2}(t) = \frac{2\langle c|n_s \rangle}{\langle c|v_s \rangle^2}(t).$$

Es gilt  $n_s(t) \rightarrow n$  und  $v_s(t) \rightarrow v$  für  $t \rightarrow 0$ . Daher konvergieren auf der rechten Seite der Gleichung

$$\frac{2\langle c|n_s \rangle}{\langle c|v_s \rangle^2}(t) = \frac{2\langle c|n \rangle}{\langle c|v \rangle^2}(t) \cdot \frac{\langle c|n_s \rangle}{\langle c|n \rangle}(t) \cdot \frac{\langle c|v \rangle^2}{\langle c|v_s \rangle^2}(t)$$

die letzten beiden Faktoren gegen 1, während der erste, wie in Abschn. 3.1 gezeigt, gegen den Wert aus  $(K_1)$  konvergiert.

**Weitere Varianten.** Bei der Definition des Krümmungsdreiecks sind sogar noch weitere Varianten möglich, z.B. kann man im Tangentenzugang die Tangente durch die Sehne von  $c(0)$  bis  $c(t)$ , in den Sekantenzugängen die Sehnen von  $c(-t)$  bis  $c(t)$  durch die von  $c(0)$  nach  $c(2t)$  ersetzen. Andererseits ist aber nicht jedes einigermaßen plausible Dreieck ein zulässiges Krümmungsdreieck, wie man am Steigungsdreieck sieht: Ist z.B.  $f(x) = x^2 + d \cdot x$  mit  $d \neq 0$ , so gilt stets  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)/x^2 = \infty$ , während die Krümmung in Null gleich  $2/(1+d^2)^{3/2}$  ist.

## 4 Der höhere Standpunkt

Die ersten beiden der in diesem Abschnitt vorgestellten Zugänge sind – zumindest in Spezialfällen – die in der Fachliteratur üblichen.

In diesem Abschnitt sei  $v(t) := c'(t)/\|c'(t)\|$  der Einheitstangentenvektor und wie bisher  $v = v(0)$  sowie  $n$  der Einheitsnormalenvektor aus (3).

### 4.1 Krümmung als relative Tangentenänderung

In diesem Zugang wird Krümmung als Änderung des Tangentenvektors  $v(t)$  (gemessen in Richtung der Normalen  $n$ , siehe die Abbildung am Ende dieses Abschnitts) relativ zur Bogenlänge des durchlaufenden Kurvenstücks definiert:

$$\kappa := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\langle v(t) | n \rangle}{\int_0^t \|c'(\tau)\| d\tau}, \quad (\text{D})$$

Man erhält nach Umformung und Anwendung der Regel von l'Hospital

$$\kappa = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\langle c'(t) | n \rangle}{\|c'(t)\| \int_0^t \|c'(\tau)\| d\tau} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\langle c''(t) | n \rangle}{\|c'(t)\|' \int_0^t \|c'(\tau)\| d\tau + \|c'(t)\|^2} \quad (4)$$

und damit ergibt sich wieder die Krümmungsformel (K<sub>1</sub>).

**Bemerkung.** Ist die Kurve  $c$  speziell nach Bogenlänge parametrisiert, d.h. wird mit konstanter Geschwindigkeit vom Betrag 1 durchlaufen, so vereinfacht sich die Formel (D) zu

$$\kappa = \langle c''(0) | n \rangle \quad (\text{D}_1)$$

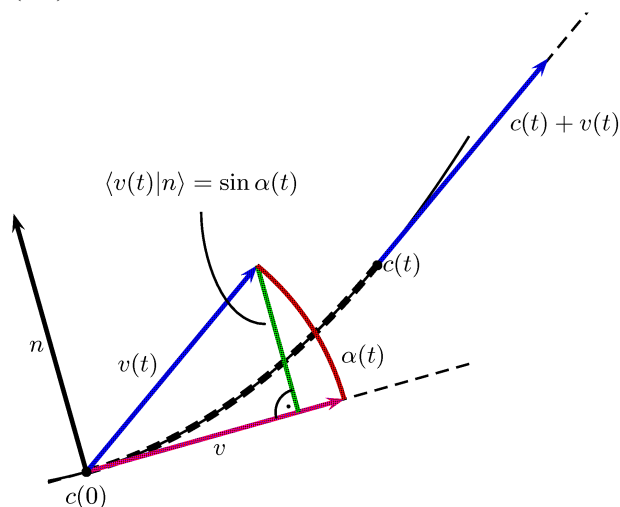
Dies ist die in der Differentialgeometrie übliche Definition der Krümmung (siehe Do Carmo 1983). Für praktische Zwecke ist diese einfache Formel jedoch wenig hilfreich, da die Parametrisierung nach Bogenlänge bei konkreten Kurven fast nie explizit durchführbar ist und Funktionsgraphen (außer bei konstanten Funktionen) nicht nach Bogenlänge parametrisiert sind.

### 4.2 Krümmung als relative Winkeländerung

Die Idee besteht in diesem Zugang darin, Krümmung als Änderung des Tangentialwinkels  $\alpha(t)$  ( $= \arcsin(\langle v(t) | n \rangle)$ ), wieder relativ zur Bogenlänge, zu messen (vgl. im Fall von Funktionsgraphen z.B. Schröer 2001 mit Bezug auf Bronstein 1985). Die Winkeldefinition der Krümmung drückt dies aus:

$$\kappa := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha(t)}{\int_0^t \|c'(\tau)\| d\tau}. \quad (\text{W})$$

Mit der Regel von l'Hospital erhält man daraus wieder die Krümmungsformel ( $K_1$ ).



Die Skizze zeigt die enge Verbindung der Formeln (D) und (W). Es ist lediglich  $\sin \alpha(t)$  durch  $\alpha(t)$  (im Bogenmaß) ersetzt.

### 4.3 Krümmung und zweite Fundamentalform

Wir erläutern hier, dass sich der Tangenzugang aus Abschnitt 3.1 als Spezialfall eines differentialgeometrischen Resultats aus der Flächentheorie interpretieren lässt. Für die hier benötigten Definitionen und Resultate aus der Flächentheorie verweisen wir auf Kühnel (2012, Abschn. 3B).

Wir betrachten dazu zunächst den Tangenzugang für eine Kurve  $c$ , die sich in folgendem Sinne in spezieller Lage befindet: Es sei  $c$  ein Graph  $t \mapsto (t, f(t))$  mit  $f(0) = f'(0) = 0$ . Dies kann stets erreicht werden (sogenannte *Mongesche Koordinaten*). Dann gilt

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{2a(t)}{b^2(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2f(t)}{t^2} = f''(0) = \langle c''(0) | n \rangle.$$

Der Term  $\langle c''(0) | n \rangle$  entspricht der zweiten Fundamentalform in der Flächentheorie. Das obige Resultat lässt sich mit dieser Interpretation auch so formulieren:

(\*) Der Graph der zweiten Fundamentalform von  $c$  in  $0$ ,  $\left( t, \frac{t^2}{2} \langle c''(0) | n \rangle \right)$  ist

tangential von zweiter Ordnung an  $c$ .

Die zweite Fundamentalform ist in der Flächentheorie der Ausgangspunkt für die Definition von Krümmung.

Die Aussage in (\*) gilt wortgleich auch in der Flächentheorie. Analog zur obigen Erläuterung sieht man auch dies, indem man die Fläche in Mongeschen Koordinaten betrachtet.

## 5 Unterschiede und Bezüge zwischen den Zugängen

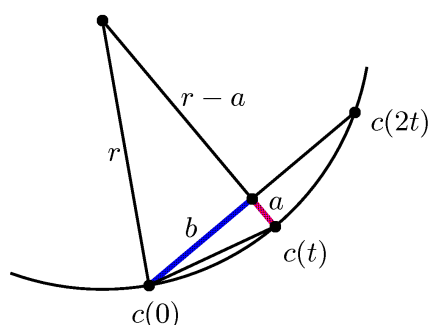
In diesem Abschnitt stellen wir einige fachinhaltliche und fachdidaktische Aspekte der betrachteten Zugänge vergleichend zusammen.

### 5.1 Fachinhaltliche Bezüge zwischen den Zugängen

Obwohl die Zugänge von sehr unterschiedlichen Vorstellungen ausgehen, haben sie strukturell überraschende Gemeinsamkeiten. In den Dreieckszugängen haben die betrachteten Quotienten per Konstruktion ohnehin dieselbe Struktur. Bei Tangenten- und Sekantenzugang sind überdies die Zähler (und damit auch die Nenner) asymptotisch gleich (d.h. deren Quotient konvergiert gegen 1). Für den Graphen-Sekanten-Zugang gilt dies nicht, wie bereits einfache Beispiele zeigen.

Die Zugänge aus Abschnitt 4 und die Zugänge (T) und (S) über das Tangenten- bzw. Sekantendreieck sind – bei passender Schreibweise – ebenfalls asymptotisch gleich: Um dies zu sehen betrachtet man bei den Dreieckszugängen die »differenziellen« Quotienten, d.h. die nach einmaliger Anwendung der Regel von l'Hospital erhaltenen Ausdrücke. Dies ist z.B. beim Tangentenzugang die Form  $(T^\dagger)$ , die denselben Zähler hat wie der erste Term in der Formel (4) für die relative Tangentenänderung.

Am Beispiel eines Kreisbogens erkennt man, dass auch Krümmungskreis (speziell: geometrischer Zugang) und Dreieckszugänge (speziell: Sekantenzugang) in direkter Beziehung stehen – dies zeigt sich in folgender Skizze:



Aus  $b^2 + (r - a)^2 = r^2$  folgt  $b^2 + a^2 - 2ar = 0$

und damit

$$\frac{2a}{b^2} = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{a^2}{b^2} \right) \rightarrow \frac{1}{r} \quad \text{für } t \rightarrow 0$$

## 5.2 Fachdidaktische Gesichtspunkte

**Grundvorstellungen.** Alle Zugänge gehen von geometrischen Vorstellungen von Krümmung aus. Sie können daher genutzt werden, um verschiedene Grundvorstellungen zum Krümmungsbegriff aufzubauen:

- Krümmung als *inverser Krümmungsradius* (Abschnitt 2). Dem Krümmungskreis kommen dabei seinerseits zwei Grundvorstellungen zu:
  - Krümmungskreis als *Grenzwert von Drei-Punkte-Kreisen* (Abschnitt 2.2), analog zur Vorstellung der Tangente als Grenzwert von Sekanten
  - Krümmungskreis als *Approximation zweiter Ordnung* (Abschnitt 2.3), analog zur Vorstellung der Tangente als linearer Approximation
- Krümmung als *Abweichung von der Tangente bzw. Sekante* (Abschnitt 3)
- Krümmung als *relative Tangentenänderung* (Abschnitt 4.1)
- Krümmung als *relative Winkeländerung* (Abschnitt 4.2)

**Erforderliche Vorkenntnisse.** Hier zeigt sich eine weite Spanne – von den elementar-geometrisch fassbaren Sekantendreiecken, bei denen schlicht Kurvenpunkte verbunden werden, bis zu den begrifflich anspruchsvollen Zugängen aus Abschnitt 4, bei denen das Konzept der Bogenlänge von Kurven vorab benötigt wird.

**Schnittstellenaspekt.** Die vorgestellten Zugänge lassen sich nutzen um eine Vielfalt von Grundvorstellungen zum Krümmungsbegriff aufzubauen. Gleichzeitig sind sie in einen jeweils verschiedenen globalen Theoriezusammenhang eingebettet. Dies zeigt, dass sie ein fruchtbarer Gegenstand für Schnittstellenaktivitäten sind (vgl. die Teilziele A und B in Bauer 2013, Abschnitt 3.2).

**Danksagung.** Wir sind Doris Behrendt zu Dank verpflichtet – ihr Hinweis auf Schülerfragen zur Krümmung des Graphen der Parabel bildete den Ausgangspunkt für diesen Artikel.

## Literatur

- Ball, D.L., Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. In: J. Boaler (Hrsg.), *Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics* (S. 83-104). Westport, CT: Ablex.
- Bauer, Th., Partheil, U. (2009). Schnittstellenmodule in der Lehramtsausbildung im Fach Mathematik. *Math. Semesterber.* 56, 85-103.
- Bauer, Th. (2012). *Analysis – Arbeitsbuch. Bezüge zwischen Schul- und Hochschulmathematik, sichtbar gemacht in Aufgaben mit kommentierten Lösungen.* Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Bauer, Th. (2013). Schnittstellen bearbeiten in Schnittstellenaufgaben. In: Ch. Ableitinger, J. Kramer, S. Prediger (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung* (S. 39-56). Wiesbaden: Springer Spektrum.



- Borges, F. (2012). Krümmung – diesmal quantitativ. *MNU* 65, No. 3, 150-153.
- Bronstein, I. N., Semendjajew, K. A. (1985). *Taschenbuch der Mathematik*. Leipzig: Teubner
- Bruner, J. (1980). *Der Prozess der Erziehung*. Düsseldorf: Schwann.
- Buchberger, B. (1990). Should Students Learn Integration Rules? *SIGSAM Bull.* 24, No. 1, 10-17.
- Do Carmo, M. (1983). *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen*. Wiesbaden: Vieweg.
- Geisreiter, R. (2004). Krümmung von Funktionsgraphen – eine anschauliche Einführung. *Prax. Math. Sch.* 46, No. 6, 268-277.
- Henn, H.-W. (1997). *Realitätsnaher Mathematikunterricht mit DERIVE*. Bonn: Dümmler-Verlag.
- Hildebrandt, S. (2008). *Analysis 2*. Berlin Heidelberg: Springer.
- Kazemi, E., Stipek, D. (2001). Promoting conceptual thinking in four upper-elementary mathematics classrooms. *The Elementary School Journal* 102, No. 1, 59-80.
- Kroll, W. (1985). *Grund- und Leistungskurs Analysis, Band 1: Differentialrechnung*. Bonn: Dümmler-Verlag.
- Kühnel, W. (2012). *Differentialgeometrie. Kurven - Flächen - Mannigfaltigkeiten*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Müller, G.N., Steinbring, H., Wittmann, E. Ch. (2002). *Jenseits von PISA. Bildungsreform als Unterrichtsreform. Ein Fünf-Punkte-Programm aus systemischer Sicht*. Velber: Kallmeyer'sche Verlagsbuchhandlung.
- Prediger, S. (2013). Unterrichtsmomente als explizite Lernanlässe in fachinhaltlichen Veranstaltungen. In: Ch. Ableitinger, J. Kramer, S. Prediger (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung* (S. 151-168). Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Schmidt, G., Körner, H., Lergenmüller, A. (Hrsg.) (2010). *Mathematik Neue Wege Analysis*. Braunschweig: Schroedel.
- Schröer, H. (2001). *Der Krümmungskreis*. [www.rzuser.uni-heidelberg.de/~c07](http://www.rzuser.uni-heidelberg.de/~c07) [10.9.2013].
- Steinberg, G. (1985). Die Krümmung von Funktionsgraphen – Unterrichtsvorschläge für Leistungs- und Grundkurse. *Didaktik der Mathematik* 3, 222-236.
- Yackel, E., Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal of Research in Mathematics Education* 27, No. 4, 458-477.