Erschienen in: Schelhowe, H., Schaumburg, M., Jasper, J. (Eds.), Teaching is Touching the Future. Academic teaching within and across disciplines. Bielefeld: Webler, 2015.

Übungsgelegenheiten im Mathematikstudium – Erproben neuer Konzepte

Thomas Bauer

Üben im Mathematikstudium: drei Problemfelder – drei Ansätze

Das Üben nimmt im Mathematikstudium beträchtlichen Raum ein: Zu fast jeder Mathematikvorlesung werden Übungsaufgaben gestellt, an denen die Studierenden im Wochenturnus arbeiten und die anschließend in vorlesungsbegleitenden Übungsveranstaltungen besprochen werden. Dass diese Unterrichtsform so etabliert ist, kann man als Ausdruck einer Lernauffassung verstehen, die im Kern konstruktivistisch ist: Mathematiklernen ist nicht allein durch Instruktion möglich, sondern benötigt eine intensive Konstruktionsphase, in der das Individuum eigentätig Wissen aufbaut. In der Tradition der universitären Mathematikausbildung werden mit dieser Absicht Problemlöseaufgaben gestellt, durch die sich die Studierenden die in der Vorlesung vorgestellten Inhalte zueigen machen, Tiefenverständnis aufbauen und Wissen vernetzen sollen. Bei den Übungsaufgaben handelt es sich demnach nicht um *Testaufgaben*, sondern um *Lernaufgaben*. In jüngerer Zeit werden an einzelnen Standorten auch Aufgaben mit weiteren spezifischen Zielen gestellt, etwa *experimentelle Aufgaben* (Halverscheid und Müller 2013) oder *Schnittstellenaufgaben* (siehe Abschnitt 1).

In der Keynote, die diesem Beitrag zugrunde liegt, wurden drei Problemfelder des Mathematikstudiums herausgearbeitet und es wurde jeweils ein Ansatz vorgestellt, mit dem der Autor dem festgestellten Problem begegnet – Übungen und Übungsaufgaben spielen dabei jeweils eine zentrale Rolle.

(1) **Doppelte Diskontinuität im Lehramtsstudium**: *»Warum soll ich als Lehramtsstudent/Lehramtsstudentin so etwas lernen?«* –

- Wie durch Schnittstellenaufgaben Bezüge zwischen Schul- und Hochschulmathematik hergestellt werden können.

(2) **Frustration bei Übungsaufgaben**: *»Die schaffe ich sowieso nicht.«* –

- Wie Online-Aufgaben als Brückenschlag zwischen Vorlesung und traditionellen Übungsaufgaben dienen können.

Thomas Bauer, Fachbereich Mathematik und Informatik, Philipps-Universität Marburg, Hans-Meerwein-Straße, 35032 Marburg, E-Mail: tbauer@mathematik.uni-marburg.de

(3) **Ineffizient genutzte Präsenzzeit**: *»In der Übung schreibe ich die Musterlösungen mit.«* –

- ▶ Wie Studierende durch die Methode der Peer-Instruction in den Übungen aktiviert werden können.

1 Mit Schnittstellenaufgaben wider die Doppelte Diskontinuität

Problemlage. Lehramtsstudierende erleben markante Bruchstellen sowohl am Beginn ihres Studiums als auch beim Eintritt in die Berufstätigkeit, die den Übergängen

$$\text{Schulmathematik} \to \text{universitäre Mathematik} \to \text{Schulmathematik}$$

entsprechen. Wenn es im Studium nicht gelingt, tragfähige Verknüpfungen zwischen Schulmathematik und universitärer Mathematik aufzubauen, dann entsteht das bereits von Felix Klein (1924) formulierte Problem der *Doppelten Diskontinuität*: Studierende nehmen Schulmathematik und universitäre Mathematik als getrennte Welten wahr, was zu einem gravierenden Motivationsproblem im Studium führen kann: »Warum universitäre Mathematik lernen?« Zudem besteht die Gefahr, dass sie nach dem Studienabschluss die schulmathematische Relevanz hochschulmathematischer Inhalte nicht sehen und demzufolge fachliche Kenntnisse zu wenig für den Unterricht nutzbar machen (siehe Hefendehl-Hebeker 2013 für einen Problemaufriss).

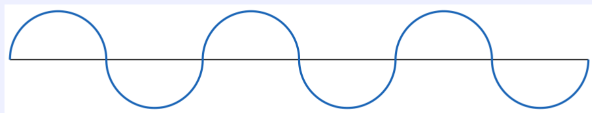
Ansatz. Angesichts dieser Problemlage ist es sicherlich von Vorteil, wenn Lehrende in ihren Lehrveranstaltungen vielfach auf vorhandene Bezüge hinweisen. Bleibt es aber bei der bloßen »Beschwörung« solcher Bezüge, so ist die so erzielte Wirkung oft gering. Eine Reihe von Projekten haben sich daher in den letzten Jahren des Problems angenommen, u.a. Leufer und Prediger (2007), Bauer und Partheil (2009), Beutelspacher et al. (2011) Ableitinger, Hefendehl-Hebeker und Herrmann (2010). Wir gehen im Folgenden kurz auf das Schnittstellenkonzept (Bauer und Partheil 2009) ein. Dessen Grundgedanke ist es, Studierende im Rahmen von Übungsaufgaben gezielt mit den Verknüpfungen von Schul- und Hochschulmathematik zu befassen (*Schnittstellenaufgaben*). Folgende Teilziele sind damit beabsichtigt (Bauer 2013b):

- **A.** Grundvorstellungen aufbauen und festigen
- **B.** Unterschiedliche Zugänge verstehen und analysieren
- **C.** Mit hochschulmathematischen Werkzeugen Fragestellungen der Schulmathematik vertieft verstehen
- **D.** Mathematische Arbeitsweisen üben und reflektieren

Zur Konkretisierung zeigen wir eine Beispielaufgabe zu Ziel C (vgl. Bauer 2013a, S. 116):

Aufgabe

(a) Im »Schlangenparadoxon« (Kanforowitsch 1983) wird scheinbar »bewiesen«, dass $\pi = 2$ gilt, indem man im nachfolgenden Bild eine Strecke durch Halbkreise approximiert und die Zahl der Halbkreise gegen Unendlich gehen lässt. Führen Sie diesen angeblichen »Beweis« aus und erläutern Sie dann, an welcher Stelle der Argumentation eine falsche Behauptung verwendet wird.



Nutzen Sie für Ihre Antwort die Begriffe *Folge von parametrisierten Kurven*, *Kurvenlänge*, *Konvergenz*.

(b) Beschreiben Sie die Archimedische Methode, bei der ein Kreis durch eine Folge regelmäßiger n-Ecke approximiert wird, wodurch man eine Folge reeller Zahlen gewinnt, die gegen π konvergiert.

(c) Erläutern Sie, warum das Vorgehen in (b) zu *richtigen* Ergebnissen führt, während man in (a) zu einem Widerspruch kommt. Wo liegt der fundamentale Unterschied?

Diese Aufgabe soll dazu führen, dass die in der Schulmathematik verwendete Archimedische Methode tiefer verstanden und an die in der universitären Analysis angestellten Überlegungen zu rektifizierbaren Kurven angekoppelt wird. Sie schärft die Argumentation in einer Situation, in der in der Schulmathematik Plausibilitätsüberlegungen genügen müssen.

Die Möglichkeiten des Schnittstellenkonzepts enden hier nicht – man kann an geeigneten Beispielen sogar fachliche Längsschnitte von der gymnasialen Unterstufe bis zu weiterführenden Mathematikvorlesungen bearbeiten lassen (Bauer 2013c). So wird insbesondere deutlich, dass beim Voranschreiten in der Mathematikausbildung der Abstraktionsgrad erhöht und die mathematischen Werkzeuge weiterentwickelt werden, während sich in den Arbeitsweisen über die Stufen hinweg viele Übereinstimmungen feststellen lassen.

2 Online-Aufgaben als Brückenschlag zwischen Vorlesung und traditionellen Übungsaufgaben

Problemlage. Die Dozenten von Mathematikvorlesungen haben in der Regel eine bestimmte Arbeitsreihenfolge vor Augen, in der Studierende beim Erarbeiten der mathematischen Inhalte vorgehen sollten:

1. Hören der Vorlesung

$\longrightarrow$ 2. Nacharbeiten der Vorlesung

$\longrightarrow$ 3. Arbeiten an den Übungsaufgaben

$\longrightarrow$ 4. Besprechen der Aufgaben in den Übungsgruppen

$\longrightarrow$ 5. Aufarbeiten von individuellen Defiziten

In der Realität wird jedoch Schritt 2 oft übersprungen und die Studierenden wenden sich nach der Vorlesung sogleich der Arbeit an den Übungsaufgaben zu: Eine Befragung, die wir bei Studierenden in einer Vorlesung des Autors durchgeführt haben (Sommersemester 2014, Analysis 1, zweites Studiensemester, n=254), zeigt, dass nur etwa ein Drittel der Studierenden vor der Arbeit an den Übungsaufgaben Zeit auf das Nacharbeiten der Vorlesung verwendet (siehe Beck 2014).

Dies deutet stark darauf hin, dass der Mehrheit der Studierenden der Zweck der Übungsaufgaben nicht bewusst ist, denn diese sind in der Regel so angelegt, dass sie ein Erstverständnis der Vorlesungsinhalte *voraussetzen* – in den allermeisten Fällen sind sie nicht zu dessen *Erwerb* konzipiert. Die beschriebene Arbeitsmethodik kann daher rasch zu Überforderung führen. Im günstigeren Fall arbeiten Studierende dann einzelne Teile der Vorlesung nach, die ihnen für die jeweilige Aufgabe relevant erscheinen. Im ungünstigeren Fall geben sie die Bearbeitung frustriert auf und kopieren Lösungen von anderen, um die geforderten Übungspunkte zu erreichen. Manche suchen auch im Internet nach Lösungen.

Ansatz. Die Idee, die wir angesichts dieser Problemlage verfolgen, besteht darin, wöchentliche Online-Aufgaben zu stellen (internetbasiert, Lernplattform ILIAS), die als Bindeglied zwischen der Vorlesung und den schriftlich zu bearbeitenden Übungsaufgaben traditionellen Zuschnitts fungieren. Deren Ziel ist es,

- Anlässe zu schaffen, um nach der Vorlesung (Instruktionsphase) das *Nacharbeiten* anzuregen,
- hierdurch das *Verständnisniveau* zu erreichen, das für die schriftlichen Übungsaufgaben benötigt wird, und
- in frühem Stadium *Fehlvorstellungen* vorzubeugen.

Ein Beispiel soll dies verdeutlichen (für weitere Beispiele und für eine detaillierte Beschreibung des Konzepts und der konkreten technischen Umsetzung siehe Beck 2014):

> Beurteilen Sie, ob die folgenden Aussagen über differenzierbare Funktionen wahr oder falsch sind.
>
> (a) Die Funktion $x \mapsto \sin(1/x)$ besitzt im Intervall $]0,1[$ unendlich viele Maximal- und Minimalstellen.
>
> (b) Falls für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine Stelle $c \in \mathbb{R}$ gilt $f'(c) = 0$, dann hat f in c ein lokales Extremum.
>
> (c) In Worten könnte der Mittelwertsatz so formuliert werden: Bei einer differenzierbaren Funktion auf einem kompakten Intervall gibt es eine Stelle, an der die Tangentensteigung gleich der Steigung der Sekante durch den Anfangs- und den Endpunkt des Graphen ist.
>
> (d) Der Mittelwertsatz ist eine Verallgemeinerung des Satzes von Rolle.

Die gestellten Fragen lassen sich durch unmittelbare Anwendung von Vorlesungswissen beantworten, ggf. ergänzt durch kurze Überlegungen. In der Terminologie der schulischen Bildungsstandards (vgl. Blum et al. 2005) würde man sie den Anforderungsbereichen 1–2 zuordnen, während traditionelle Übungsaufgaben eher im Anforderungsbereich 3 liegen.

Ergebnisse. Eine Evaluation am Semesterende hat gezeigt, dass die Studierenden das Konzept der Online-Aufgabe sehr positiv beurteilen: Die Aussage, dass sie zum

Verständnis der Vorlesungsinhalte beigetragen hat, beantworteten 72 Prozent der Befragten (n=86, Antwort auf 5-stufiger Likert-Skala) als »zutreffend« oder »eher zutreffend«.

3 Die Methode der Peer-Instruction als Instrument in mathematischen Übungsgruppen

Problemlage. Die wöchentlichen Übungen werden im Fach Mathematik sehr häufig von studentischen Tutoren durchgeführt. Diese sehen sich einer facettenreichen Aufgabe gegenüber: Neben dem Korrigieren von Hausaufgaben und dem Erteilen von Feedback beinhaltet sie auch das Vorstellen von Lösungen zu Übungsaufgaben (vgl. Biehler et al. 2012). Problematisch ist es, wenn die Vorstellung von »Musterlösungen« aus Sicht der Studierenden oder der Tutoren zur Hauptsache wird – es besteht die Gefahr, dass die Studierenden dann in einer zu passiven Rolle verbleiben und die für das Lernen notwendige Aktivierung fehlt. Lernförderliche Elemente wie das Stellen von Fragen, Diskutieren und Klären von Problemen bei Vorlesungsinhalten haben dann einen zu geringen Anteil am Geschehen.

Ansatz. Der Autor sieht eine der Ursachen für die geschilderte Problemlage darin, dass es im üblichen Ablauf einer Übung zu sehr vom situativen Geschick der Tutoren abhängt, wieviel an Aktivierung in den Übungsgruppen gelingt – auch engagierte und hochmotivierte Tutoren sind in methodischer Hinsicht verständlicherweise unerfahren. Hilfreich erscheint es daher, in den Übungsgruppen Unterrichtsmethoden zu etablieren, die aktivierend wirken und gleichzeitig unkompliziert durchzuführen sind. Besonders erfolgreich hat sich in der Erfahrung des Autors hierfür die Methode der Peer Instruction erwiesen (Mazur 1997), die er in den Übungen zur Analysis I im Sommersemester 2014 erstmals als festen Bestandteil des Übungsbetriebs eingesetzt hat. Peer Instruction wurde von Mazur im Fach Physik entwickelt und wird dort insbesondere zur Realisierung des Inverted Classroom eingesetzt. Unser Ansatz ist, die Idee der Peer Instruction in den *Übungsgruppen* zu nutzen – nach unserer Erfahrung kann sie hier auch unabhängig von Überlegungen zum Inverted Classroom sehr von Nutzen sein.

Umsetzung. Die Methode der Peer-Instruction kann hier aus Platzgründen nicht im Detail vorgestellt werden – in wenigen Sätzen lassen sich die wesentlichen Elemente und das prinzipielle Vorgehen wie folgt charakterisieren: Ausgangspunkt sind eine oder mehrere Fragen zum aktuell verhandelten Inhalt (bei Mazur »ConcepTest« genannt). Hier ein Beispiel, das wir beim Thema »Cauchy-Folgen« eingesetzt haben:

Patrick betrachtet die durch $a_n := \sqrt{n}$ definierte Folge (a_n). Er beweist:

(i) $a_n \to \infty$
(ii) $|a_{n+1} - a_n| \to 0$

Er sagt: »Die Folge ist wegen (i) nicht konvergent und wegen (ii) eine Cauchy-Folge.« Er sieht darin einen Widerspruch zu einem Satz aus der Vorlesung. Wodurch wird dieser aufgelöst?

(1) Die Folge ist konvergent.
(2) Die Folge ist bestimmt divergent.
(3) Die Folge ist keine Cauchy-Folge.
(4) Es gibt Cauchy-Folgen, die nicht konvergent sind.

Fragen, die sich für den Einsatz zur Peer-Instruction eignen, betreffen weniger den Kalkül als das konzeptuelle Verständnis des jeweiligen Inhalts. Günstig ist, wenn etwa 30-70 Prozent der Lernenden nach kurzer Überlegung die richtige Antwortmöglichkeit wählen. Es folgt dann die Phase der Peer-Instruction, die durch die Aufforderung »Überzeugen Sie sich gegenseitig!« eingeleitet wird. Dazu werden Gruppen von Studierenden gebildet, in denen nicht alle Gruppenmitglieder die gleiche Antwort gegeben haben. Hierin liegt der Kern des Verfahrens: Die Studierenden sind aufgefordert, sich ihrer Vorstellungen (mentalen Modelle) zum Gegenstand (hier zum Begriff *Cauchy-Folge*) bewusst zu werden und diese so zu verbalisieren, dass sie ihre Antwort mit stichhaltigen Argumenten belegen können. Fehlvorstellungen werden auf diese Weise sehr effektiv zutage gebracht, richtige Vorstellungen werden ausgeschärft (Crouch und Mazur 2001).

Für das Fach Mathematik wurde im *GoodQuestions-Projekt* (Terrel und Connelly 2005; Miller, Santaga-Vega und Terrell 2006) gezeigt, wie geeignete Fragen beschaffen sein können. Der Autor hat für den Einsatz der Methode in der Analysis I eine Anzahl Fragen aus dem GoodQuestions-Projekt nutzen können. Überwiegend wurden allerdings neue Fragen konzipiert (ca. 75 %), da eine genaue Passung zu den Inhalten der Vorlesung wesentlich ist (so beim obigen Beispiel zu Cauchy-Folgen).

Konstruktion guter Fragen. Der entscheidende Faktor für das Gelingen der Methode liegt in der Konstruktion von geeigneten Fragen: Sie müssen so beschaffen sein, dass die oben angesprochenen Wirkungen eintreten – daher dürfen sie nicht Oberflächenwissen abfragen, sondern müssen *mentale Modelle* aktivieren. Zudem ist das passende Anspruchsniveau entscheidend: Die Durchführung der Peer Instruction ist nicht gewinnbringend, wenn in der anfänglichen Befragung zu viele oder zu wenige Studierende die Frage richtig beantworten (da dann zu wenig Anlass für Diskussion bzw. zu wenig Aussicht auf produktive Klärungen besteht).

Ergebnisse. In der Umsetzung durch den Autor wurde Peer Instruction als regelmäßiges Element in den Übungen etabliert: Es wurde ein Drittel der Übungszeit (jeweils 30 Minuten am Beginn einer 90-minütigen Sitzung) auf Peer-Instruction verwendet. Die Einschätzungen der Studierenden bei einer Befragung zu Semesterende ($n=141$, Antworten auf 5-stufiger Likert-Skala) waren ausgesprochen positiv: Eine deutliche Mehrheit beurteilt die Methode als produktiv für ihr Lernen (70 %), schätzt es als sinnvollen Einsatz der Übungszeit ein (73 %) und wünscht eine Fortsetzung im nächsten Semester (75 %). Eine gleichzeitige Befragung der Tutoren ergab ein ebenso positives

Ergebnis.

Eine detaillierte Beschreibung der Überlegungen bei der Konzeption der Fragen, der Umsetzung und der Ergebnisse soll an anderer Stelle (Bauer, in Vorbereitung) erfolgen.

Literatur

Ableitinger, Ch., Hefendehl-Hebeker, L., Herrmann, A. (2010). Mathematik besser verstehen. In: A. Lindmeier und St. Ufer (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 93–94). Münster: WTM-Verlag Stein.

Bauer, Th., Partheil, U. (2009). Schnittstellenmodule in der Lehramtsausbildung im Fach Mathematik. *Math. Semesterber.* 56, 85-103.

Bauer, Th. (2013a). *Analysis – Arbeitsbuch. Bezüge zwischen Schul- und Hochschulmathematik, sichtbar gemacht in Aufgaben mit kommentierten Lösungen.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Bauer, Th. (2013b). Schnittstellen bearbeiten in Schnittstellenaufgaben. In: C. Ableitinger, J. Kramer, S. Prediger (Eds.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung*, Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik (pp. 39–56). Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Bauer, Th. (2013c). Schulmathematik und universitäre Mathematik – Vernetzung durch inhaltliche Längsschnitte. In: H. Allmendinger, K. Lengnink, A. Vohns, G. Wickel (Eds.), *Mathematik verständlich unterrichten* (pp. 235–252). Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Beck, F. (2014). Entwicklung von diagnostischen Items zum Begriffs- und Satzverständnis in der Analysis. Wissenschaftliche Hausarbeit im Fach Mathematik, Philipps-Universität Marburg.

Beutelspacher, A., Danckwerts, R., Nickel, G., Spies, S., Wickel, G. (2011). *Mathematik Neu Denken. Impulse für die Gymnasiallehrerbildung an Universitäten*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Biehler, R., Hochmuth, R., Klemm, J., Schreiber, S., Hänze, M. (2012). Fachbezogene Qualifizierung von MathematiktutorInnen – Konzeption und erste Erfahrungen im LIMA-Projekt. In: Zimmermann, M., Bescherer, C., Spannagel, C., *Mathematik lehren in der Hochschule – Didaktische Innovationen für Vorkurse, Übungen und Vorlesungen* (pp. 45-56). Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Blum, W., Drüke-Noe, C., Leiß, D., Wiegand, B., Jordan, A. (2005). Zur Rolle von Bildungsstandards für die Qualitätsentwicklung im Mathematikunterricht. ZDM Vol. 37 (4).

Crouch, C.H., Mazur, E. (2001). Peer Instruction: Ten years of experience and results. *Am. J. Phys.* 69 (9)

Halverscheid, S., Müller, N.C. (2013). Experimentelle Aufgaben als grundvorstellungsorientierte Lernumgebungen für die Differenzialrechnung mehrerer Veränderlicher. In: Ableitinger, Ch., Kramer, J., Prediger, S. (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung* (S. 117–134). Heidelberg: Springer Spektrum.

Hefendehl-Hebeker, L. (2013). Doppelte Diskontinuität oder die Chance der Brückenschläge. In: Ableitinger, Ch., Kramer, J., Prediger, S. (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung* (S. 1–15). Heidelberg: Springer Spektrum.

Kanforowitsch, A.G. (1983). *Logischen Katastrophen auf der Spur*. Fachbuchverlag Leipzig.

Klein, F. (1924). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte, Bd. 1.* Springer: Berlin.

Leufer, N., Prediger, S. (2007). »Vielleicht brauchen wir das ja doch in der Schule«, Sinnstiftung und Brückenschläge in der Analysis als Bausteine zur Weiterentwicklung der fachinhaltlichen gymnasialen Lehrerbildung. In: A. Büchter, H. Humenberger, S. Hußmann, S. Prediger (Hrsg.): *Realitätsnaher Mathematikunterricht – vom Fach aus und für die Praxis*, Festschrift für Wolfgang Henn zum 60. Geburtstag, Franzbecker, Hildesheim.

Mazur, E. (1997). Peer Instruction: Getting students to think in class. In: E.F. Redish, J.S. Rigden (eds.), *The Changing Role of Physics Departments in Modern Universities* (pp. 981–988). The American Institute of Physics.

Miller, R.L., Santana-Vega, E., Terrell, M.S.: Can good questions and peer discussion improve calculus instruction? PRIMUS. Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 16(3), 193–203 (2006)

Terrell, M.S., Connelly, R.: GoodQuestions Project. Department of Mathematics, Cornell University. `http://www.math.cornell.edu/~GoodQuestions`