$$\mathrm{mb}\ \hbar \underset{m}{\triangle} \bar{\mathbb{R}}_+ \xrightarrow[\mu]{\int^{\hbar}} \bar{\mathbb{R}}_+$$

$$\hbar \overset{1}{\underset{m}{\triangle}} \bar{\mathbb{R}}_+ = \frac{\daleth \in \hbar \underset{m}{\triangle} \bar{\mathbb{R}}_+}{\int_\mu^\hbar \daleth < \infty}$$

$$\begin{cases} \mathsf{1} = \sum_{a \in \hbar \mathsf{1}} a \chi_{\overset{-1}{\mathsf{1}}_a} \\ a \in \mathbb{R}_+ : \quad \overset{-1}{\mathsf{1}}_a \in \mathcal{M} : \quad \mathsf{1}_\hbar \ \mathrm{fin} \end{cases} \Rightarrow \int_\mu^\hbar \mathsf{1} = \sum_{a \in \hbar \mathsf{1}} a \llcorner_{\overset{-1}{\mathsf{1}}_a}$$

$$\begin{cases} \mathsf{1} = \sum_{E \in \mathcal{E}} \mathsf{1}^E \chi_E \\ \hbar = \bigcup_{E \in \mathcal{E}} E : \quad \mathrm{fin}\ \mathcal{E} \subset \mathcal{M} : \quad \mathsf{1}^E \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \int_\mu^\hbar \mathsf{1} = \sum_{E \in \mathcal{E}} \mathsf{1}^E \llcorner_E$$

$$\int_\mu^\hbar \underbrace{\mathsf{1}a + \acute{\mathsf{1}}\acute{a}} = \overbrace{\int_\mu^\hbar} \mathsf{1} a + \overbrace{\int_\mu^\hbar} \acute{\mathsf{1}}\, \acute{a}$$

$$\mathsf{1} = \sum_{\dot{E} \in \dot{\mathcal{E}}} \dot{\mathsf{1}}^{\dot{E}} \chi_{\dot{E}} \Rightarrow \mathsf{1}a + \acute{\mathsf{1}}\,\acute{a} = \sum_{E \in \mathcal{E}} \sum_{\acute{E} \in \acute{\mathcal{E}}} \underbrace{\mathsf{1}^E a + \acute{\mathsf{1}}^{\acute{E}} \acute{a}} \chi_{E \cap \acute{E}} \Rightarrow$$

$$\int_\mu^\hbar \underbrace{\mathsf{1}a + \acute{\mathsf{1}}\acute{a}} = \sum_{E \in \mathcal{E}} \sum_{\acute{E} \in \acute{\mathcal{E}}} \underbrace{\mathsf{1}^E a + \acute{\mathsf{1}}^{\acute{E}} \acute{a}} \llcorner_{E \cap \acute{E}} = \sum_{E \in \mathcal{E}} \sum_{\acute{E} \in \acute{\mathcal{E}}} \mathsf{1}^E \llcorner_{E \cap \acute{E}} a + \sum_{E \in \mathcal{E}} \sum_{\acute{E} \in \acute{\mathcal{E}}} \acute{\mathsf{1}}^{\acute{E}} \llcorner_{E \cap \acute{E}} \acute{a}$$

$$= \sum_{E \in \mathcal{E}} \mathsf{1}^E \sum_{\acute{E} \in \acute{\mathcal{E}}} \llcorner_{E \cap \acute{E}} a + \sum_{\acute{E} \in \acute{\mathcal{E}}} \acute{\mathsf{1}}^{\acute{E}} \sum_{E \in \mathcal{E}} \llcorner_{E \cap \acute{E}} \acute{a} = \sum_{E \in \mathcal{E}} \mathsf{1}^E \llcorner_E a + \sum_{\acute{E} \in \acute{\mathcal{E}}} \acute{\mathsf{1}}^{\acute{E}} \llcorner_{\acute{E}} \acute{a} = \overbrace{\int_\mu^\hbar} \mathsf{1} a + \overbrace{\int_\mu^\hbar} \acute{\mathsf{1}}\, \acute{a}$$

$$\mathsf{1} \geqslant \acute{\mathsf{1}} \Rightarrow \int_{\mu}^{\hbar} \mathsf{1} \geqslant \int_{\mu}^{\hbar} \acute{\mathsf{1}} \in \bar{\mathbb{R}}_+$$

$$0 \leqslant \mathsf{1} - \acute{\mathsf{1}} = \sum_{E \in \mathcal{E}} \sum_{\acute{E} \in \acute{\mathcal{E}}} \underbrace{\mathsf{1}^{E} - \acute{\mathsf{1}}^{\acute{E}}} \chi_{E \cap \acute{E}}$$

$$\mathsf{1}^{E} < \acute{\mathsf{1}}^{\acute{E}} \Rightarrow \nu_{E \cap \acute{E}} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\mu}^{\hbar} \mathsf{1} = \sum_{E \in \mathcal{E}} \sum_{\acute{E} \in \acute{\mathcal{E}}} \mathsf{1}^{E} \nu_{E \cap \acute{E}} = \sum_{\mathsf{1}^{E} \geqslant \acute{\mathsf{1}}^{\acute{E}}} \mathsf{1}^{E} \nu_{E \cap \acute{E}} \geqslant \sum_{\mathsf{1}^{E} \geqslant \acute{\mathsf{1}}^{\acute{E}}} \acute{\mathsf{1}}^{\acute{E}} \nu_{E \cap \acute{E}} = \sum_{E \in \mathcal{E}} \sum_{\acute{E} \in \acute{\mathcal{E}}} \acute{\mathsf{1}}^{\acute{E}} \acute{a}\, \nu_{E \cap \acute{E}} = \int_{\mu}^{\hbar} \acute{\mathsf{1}}$$

$$\hbar \xrightarrow[\text{mb}]{\daleth} \bar{\mathbb{R}}_+ \Rightarrow \int_{\mu}^{\hbar} \daleth = \bigvee_{0 \leqslant \mathsf{1} \leqslant \daleth}^{\text{simple}} \int_{\mu}^{\hbar} \mathsf{1} \in \bar{\mathbb{R}}_+$$

$$0 \leqslant \daleth \leqslant \acute{\daleth} \text{ meas } \Rightarrow \int_{\mu}^{\hbar} \daleth \leqslant \int_{\mu}^{\hbar} \acute{\daleth}$$

$$c \geqslant 0 \Rightarrow \int_{\mu}^{\hbar} \daleth c = c \int_{\mu}^{\hbar} \daleth$$

$$0 \leqslant \text{ɿ}_n \rightsquigarrow \text{ɿ} \underset{\text{FAT}}{\Longrightarrow} \int \text{ɿ} \leqslant \underline{\lim} \int_{\mu}^{\hbar} \text{ɿ}_n$$

$$0 \leqslant \text{ɩ} \leqslant \text{ɿ}$$

$$\text{if} \int_{\mu}^{\hbar} \text{ɩ} = \infty \Rightarrow \bigvee_{M \in \mathcal{M}} \begin{cases} \vdash_M = \infty \\ \overset{M\frown}{\text{ɩ}} > a > 0 \end{cases}$$

$$^{M}\text{ɿ} \geqslant {}^{M}\text{ɩ} > a \Rightarrow M_n := \bigcap_{k \geqslant n} \frac{\mathsf{h}}{\text{ɿ}_k > a} \nearrow \bigcup_n M_n \supset M \Rightarrow \vdash_{M_n} \nearrow \vdash_M = \infty$$

$$\int_{\mu}^{\hbar} \text{ɿ}_n \geqslant a \vdash_{M_n} \Rightarrow \underline{\lim} \int_{\mu}^{\hbar} \text{ɿ}_n = \infty$$

$$\text{if} \int_{\mu}^{\hbar} \text{ɩ} < \infty \Rightarrow M = \frac{\mathsf{h}}{\text{ɩ} > 0} \Rightarrow \vdash_M < \infty$$

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} M_n := \bigcap_{k \geqslant n} \frac{\mathsf{h}}{\text{ɿ}_k > (1-\varepsilon)\,\text{ɩ}} \nearrow \bigcup_n M_n \supset M \Rightarrow M \llcorner M_n \nearrow 0 \Rightarrow \vdash_{M \llcorner M_n} \nearrow 0 \Rightarrow \bigvee_m \bigwedge_{n \geqslant m} \vdash_{M \llcorner M_n} \leqslant \varepsilon$$

$$\Rightarrow \int_{\mu}^{\hbar} \text{ɿ}_n \geqslant \int_{\mathsf{h}}^{M_n} \text{ɿ}_n \geqslant (1-\varepsilon) \int_{\mathsf{h}}^{M_n} \text{ɩ} = (1-\varepsilon) \overbrace{\int_{\mathsf{h}}^{M} \text{ɩ} - \int_{\mathsf{h}}^{M \llcorner M_n} \text{ɩ}} \geqslant (1-\varepsilon) \int_{\mathsf{h}}^{M} \text{ɩ} - \int_{\mathsf{h}}^{M \llcorner M_n} \text{ɩ} \geqslant \int_{\mathsf{h}}^{M} \text{ɩ} - \varepsilon \overbrace{\int_{\mathsf{h}}^{M} \text{ɩ} + \curlyvee M \text{ɩ}}$$

$$\underset{\varepsilon \nearrow 0}{\Longrightarrow} \int_{\mu}^{\hbar} \text{ɿ}_n \geqslant \int_{\mathsf{h}}^{M} \text{ɩ} = \int_{\mu}^{\hbar} \text{ɩ} \Rightarrow \underline{\lim} \int_{\mu}^{\hbar} \text{ɿ}_n \geqslant \underset{0 \leqslant \text{ɩ} \leqslant \text{ɿ}}{\curlyvee} \int_{\mu}^{\hbar} \text{ɩ} = \int_{\mu}^{\hbar} \text{ɿ}$$

$$0 \leqslant \text{⁊}_n \leqslant \text{⁊} \text{ mb}$$

$$\text{⁊}_n \underset{\text{ae}}{\rightsquigarrow} \text{⁊} \underset{\text{MCT}}{\Rightarrow} \int_\mu^\hbar \text{⁊}_n \rightsquigarrow \int_\mu^\hbar \text{⁊}$$

$$\text{⁊}_n \leqslant \text{⁊} \Rightarrow \int_\mu^\hbar \text{⁊} \leqslant \underline{\lim} \int_\mu^\hbar \text{⁊}_n \leqslant \overline{\lim} \int_\mu^\hbar \text{⁊}_n \leqslant \int_\mu^\hbar \text{⁊}$$

$$0 \leqslant \dot{\text{⁊}} \text{ meas} : \dot{a} \geqslant 0 \Rightarrow \int_\mu^\hbar \underbrace{\text{⁊}a + \acute{\text{⁊}}\acute{a}} = a \int_\mu^\hbar \text{⁊} + \acute{a} \int_\mu^\hbar \acute{\text{⁊}}$$

$$0 \leqslant \dot{\text{⁊}}_n \nearrow \dot{\text{⁊}} \Rightarrow 0 \leqslant \text{⁊}_n a + \acute{\text{⁊}}_n \acute{a} \nearrow \text{⁊}a + \acute{\text{⁊}} \acute{a}$$

$$\Rightarrow a \int_\mu^\hbar \text{⁊} + \acute{a} \int_\mu^\hbar \acute{\text{⁊}} \underset{\text{MCT}}{\leftsquigarrow} a \int_\mu^\hbar \text{⁊}_n + \acute{a} \int_\mu^\hbar \acute{\text{⁊}}_n = \int_\mu^\hbar \underbrace{\text{⁊}_n a + \acute{\text{⁊}}_n \acute{a}} \underset{\text{MCT}}{\rightsquigarrow} \int_\mu^\hbar \underbrace{\text{⁊}a + \acute{\text{⁊}}\acute{a}}$$

$$\text{⁊} \geqslant 0 \Rightarrow \int_\mu^\hbar \text{⁊} = 0 \Rightarrow \text{⁊} \underset{\text{ae}}{=} 0$$

$$M_n = \overset{\text{⁊} \geqslant \frac{1}{n} (\hbar)}{2} \Rightarrow \text{⁊} \geqslant \frac{1}{n} \chi_{M_n} \Rightarrow 0 = \int_\mu^\hbar \text{⁊} \geqslant \int_\mu^\hbar \frac{1}{n} \chi_{M_n} = \frac{1}{n} \llcorner_{M_n} \Rightarrow \llcorner_{\{\text{⁊} > 0\}} = \llcorner_{\bigcup_n M_n} \leqslant \sum_n \llcorner_{M_n} = 0 \Rightarrow \text{⁊} \underset{\text{ae}}{=} 0$$

$$0 \leqslant \text{⁊}_n \text{ meas } \Rightarrow \int_\mu^\hbar \sum_{0 \leqslant n} \text{⁊}_n = \sum_{0 \leqslant n} \int_\mu^\hbar \text{⁊}_n$$

$$\sum_{n \in N} \text{⁊}_n \nearrow \sum_{0 \leqslant n} \text{⁊}_n \Rightarrow \sum_{0 \leqslant n} \int_\mu^\hbar \text{⁊}_n \nearrow \sum_{n \in N} \int_\mu^\hbar \text{⁊}_n = \int_\mu^\hbar \sum_{n \in N} \text{⁊}_n \underset{\text{MCT}}{\nearrow} \int_\mu^\hbar \sum_{0 \leqslant n} \text{⁊}_n$$