$$\Re \subset \hbar \times \hbar$$

$$x \sim \qquad\qquad \subset \qquad\qquad \hbar \xrightarrow{\qquad\sim\qquad} \hbar \sim$$

$$\text{equiv rel } \Re = \frac{x{:}y \in \hbar \times \hbar}{x \sim y} \subset \hbar \times \hbar \Leftrightarrow$$

$$0 \begin{cases} x \sim x \\ x{:}x \in \Re \\ I \subset \Re \end{cases}$$

$$1 \begin{cases} x \sim y & \Longrightarrow y \sim x \\ x{:}y \in \Re & \Longrightarrow y{:}x \in \Re \\ \Re = \overset{-1}{\Re} \end{cases}$$

$$2 \begin{cases} x \sim y \sim z & \Longrightarrow x \sim z \\ x{:}y \in \Re \ni v{:}z & \Longrightarrow x{:}z \in \Re \\ \Re\Re \subset \Re \end{cases}$$

$$x\Re = \begin{cases} x{:}y \\ y \in \hbar \end{cases} = \Re x \text{ equiv class}$$

$$\sim \subset \hbar \times \hbar$$

$$\begin{tikzcd} \underset{\sim}{\hbar{:}x} \arrow[r, "\imath"] \arrow[rr, bend left, "\text{cst}"] & \hbar \arrow[r, "\pi"] & \hbar \ulcorner \hbar \end{tikzcd}$$

$$\underset{\sim}{\hbar{:}x} = \frac{y \in \hbar}{x \sim y}$$

$$\hbar \ulcorner \hbar = \frac{\underset{\sim}{\hbar{:}\mathsf{h}}}{\mathsf{h} \in \hbar}$$

$$\mathsf{h} \in \hbar \xrightarrow{\pi} \hbar \sim \ni \underset{\sim}{\hbar{:}\mathsf{h}}$$

$$\underset{\sim}{\bar{\mathsf{h}}{:}x} \cap \underset{\sim}{\bar{\mathsf{h}}{:}y} \neq \varnothing \Rightarrow \underset{\sim}{\bar{\mathsf{h}}{:}x} = \underset{\sim}{\bar{\mathsf{h}}{:}y}$$

$$z \in \underset{\sim}{\bar{\mathsf{h}}{:}x} \cap \underset{\sim}{\bar{\mathsf{h}}{:}y} \Rightarrow x \sim z \sim y \underset{\text{trans}}{\Rightarrow} x \sim y$$

$$\subset: \quad \mathsf{h} \in \underset{\sim}{\bar{\mathsf{h}}{:}x} \Rightarrow \mathsf{h} \sim x \sim y \underset{\text{trans}}{\Rightarrow} \mathsf{h} \sim y \Rightarrow \mathsf{h} \in \underset{\sim}{\bar{\mathsf{h}}{:}y}$$

$$\mathcal{P} \ni P$$

$$(1) \bigwedge_x^{\bar{\mathsf{h}}} \bigvee_P^{\mathcal{P}} x \in P$$

$$(2) \bigwedge_{P \neq Q}^{\mathcal{P}} P \cap Q = \varnothing$$

$$x \sim y \Leftrightarrow \bigvee_P^{\mathcal{P}} x \in P \wedge y \in P \Leftrightarrow \bigvee_P^{\mathcal{P}} x \in P \ni v$$

$$x \sim x\colon \quad x \in \bar{\mathsf{h}} \Rightarrow \bigvee_P^{\mathcal{P}} x \in P \Rightarrow x \in P \wedge x \in P \Rightarrow x \sim x$$

$$x \sim y \curvearrowright y \sim x\colon \quad x \sim y \Rightarrow \bigvee_P^{\mathcal{P}} x \in P \wedge y \in P \Rightarrow \bigvee_P^{\mathcal{P}} y \in P \wedge x \in P \Rightarrow y \sim x$$

$$x \sim y \wedge y \sim z \curvearrowright x \sim z\colon \quad x \sim y \sim z \Rightarrow \begin{cases} \bigvee_P^{\mathcal{P}} x \in P \ni v \\ \bigvee_Q^{\mathcal{P}} y \in Q \ni z \end{cases}$$

$$\Rightarrow y \in P \cap Q \neq \varnothing \Rightarrow P = Q \Rightarrow x \in P = Q \ni z \Rightarrow y \sim z$$

$$x{:}yy{:}z = x{:}z$$

$$\widehat{x{:}y}^{-1} = y{:}x$$

equiv groupoid

$$x{:}yy{:}z = x{:}z$$

$$\widehat{x{:}y}^{-1} = y{:}x$$