

$\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{\infty}$ symplectic

$$\mathcal{J} \in \mathbb{P}_{\infty}^{\mathcal{P}} \mathbb{R} \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathbb{P}_{\infty}^{\mathcal{P}} \mathcal{P} \ni \mathcal{J}^{\dagger}$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{J}^{\dagger} \\ \mathcal{P} \end{bmatrix} \mathcal{J} = \mathcal{P} \mathcal{J}$$

$$\mathcal{J}^{\dagger} \mathcal{J} = \mathcal{J} = \mathcal{J}$$

$$\mathcal{P} \mathcal{J} = \mathcal{J} \mathcal{P} = \mathcal{P}$$

$$\mathcal{P} \mathcal{J}^{\dagger} \mathcal{J} = \begin{bmatrix} \mathcal{J}^{\dagger} \\ \mathcal{P} \end{bmatrix} \mathcal{J} = \mathcal{P} \mathcal{J}$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P} \mathcal{J} \mathcal{P} \\ \mathcal{P} \end{bmatrix} \mathcal{J} = \mathcal{P} \mathcal{P} \mathcal{J} = \begin{bmatrix} \mathcal{P} \\ \mathcal{P} \end{bmatrix} \mathcal{P}$$

$$\mathcal{J} \times \mathcal{J} = \mathcal{J}^{\dagger} \times \mathcal{J}^{\dagger} = \mathcal{J}$$

$$\mathcal{J} \times \mathcal{J} \mathcal{P} = \mathcal{J}^{\dagger} \times \mathcal{J}^{\dagger}$$

$$\mathcal{J} \times \mathcal{J} = \mathcal{J}^{\dagger} \times \mathcal{J} - \mathcal{J}^{\dagger} \times \mathcal{J} + d \begin{bmatrix} \mathcal{J}^{\dagger} \\ \mathcal{P} \mathcal{P} \end{bmatrix} \mathcal{J}$$

$$0 = \begin{bmatrix} \mathcal{J}^{\dagger} \\ \mathcal{P} \mathcal{P} \end{bmatrix} d\mathcal{J} = \mathcal{J}^{\dagger} \times \begin{bmatrix} \mathcal{J}^{\dagger} \\ \mathcal{P} \end{bmatrix} \mathcal{J} - \mathcal{J}^{\dagger} \times \begin{bmatrix} \mathcal{J}^{\dagger} \\ \mathcal{P} \end{bmatrix} \mathcal{J} + d \begin{bmatrix} \mathcal{J}^{\dagger} \\ \mathcal{P} \mathcal{P} \end{bmatrix} \mathcal{J} - \begin{bmatrix} \mathcal{J}^{\dagger} \times \mathcal{J}^{\dagger} \\ \mathcal{P} \end{bmatrix} \mathcal{J} + \begin{bmatrix} \mathcal{J}^{\dagger} \times \mathcal{P} \\ \mathcal{P} \mathcal{P} \end{bmatrix} \mathcal{J} - \begin{bmatrix} \mathcal{J}^{\dagger} \times \mathcal{P} \\ \mathcal{P} \mathcal{P} \end{bmatrix} \mathcal{J}$$

$$= \mathcal{J}^{\dagger} \times \mathcal{P} \mathcal{J} - \mathcal{J}^{\dagger} \times \mathcal{P} \mathcal{J} + d \begin{bmatrix} \mathcal{J}^{\dagger} \\ \mathcal{P} \mathcal{P} \end{bmatrix} \mathcal{J} - \mathcal{P} \mathcal{J} \times \mathcal{J} - \mathcal{J}^{\dagger} \times \mathcal{P} \mathcal{P} + \mathcal{J}^{\dagger} \times \mathcal{P} \mathcal{P}$$

$$= \mathcal{P} \mathcal{J}^{\dagger} \times \mathcal{J} - \mathcal{J}^{\dagger} \times \mathcal{J} + d \begin{bmatrix} \mathcal{J}^{\dagger} \\ \mathcal{P} \mathcal{P} \end{bmatrix} \mathcal{J} - \mathcal{J} \times \mathcal{J} \Leftarrow \mathcal{P} \mathcal{J}^{\dagger} \times \mathcal{J} = \mathcal{J}^{\dagger} \times \mathcal{P} \mathcal{J} + \mathcal{P} \times \mathcal{J}^{\dagger} \mathcal{P}$$