$$M \xrightarrow[H]{\mathsf{J}} \mathbb{R}$$

$$\partial_t \underbrace{\mathsf{J} \times \not{\mathsf{J}}} = \underbrace{\partial_t \mathsf{J}} \times \not{\mathsf{J}} + \mathsf{J} \times \underbrace{\partial_t \not{\mathsf{J}}}$$

$$\text{LHS } = H \times \underbrace{\mathsf{J} \times \not{\mathsf{J}}} = -\not{\mathsf{J}} \times \underbrace{H \times \mathsf{J}} - \mathsf{J} \times \underbrace{\not{\mathsf{J}} \times H} = \underbrace{H \times \mathsf{J}} \times \not{\mathsf{J}} + \mathsf{J} \times \underbrace{H \times \not{\mathsf{J}}} = \text{ RHS}$$

$$\partial_t \mathsf{J} = 0 = \partial_t \not{\mathsf{J}} \Longrightarrow \partial_t \underbrace{\mathsf{J} \times \not{\mathsf{J}}} = 0$$

$$\bar{H} \ltimes \mathsf{J} = H \times \mathsf{J}: \quad \bar{H}^m {}_{m}\underline{\mathsf{J}} = {}_{m}\underbrace{H \times \mathsf{J}}$$

$$\bar{H} \times \bar{K} = \overline{H \times K}$$

$$\underbrace{\bar{H} \times \bar{K}} \ltimes \mathsf{J} = \bar{H} \ltimes \underbrace{\bar{K} \ltimes \mathsf{J}} - \bar{K} \ltimes \underbrace{\bar{H} \ltimes \mathsf{J}} = H \times \underbrace{K \times \mathsf{J}} - K \times \underbrace{H \times \mathsf{J}}$$
$$= -\mathsf{J} \times \underbrace{H \times K} = \underbrace{H \times K} \times \mathsf{J} = \overline{H \times K} \ltimes \mathsf{J}$$

$$m_t = m \exp\left(t\bar{H}\right) \Longrightarrow \dot{m}_t = \bar{H}^{m_t}$$

$$\partial_t {}_{m_t}\mathsf{J} = {}_{m_t}\underbrace{H \times \mathsf{J}}$$

$$\text{LHS } = \dot{m}_t {}_{m_t}\underline{\mathsf{J}} = \bar{H}^{m_t} {}_{m_t}\underline{\mathsf{J}} = \text{ RHS}$$