$$\mathsf{C}(n) = \{n \xrightarrow[\text{bij}]{\pi} n\}$$

$$\mathsf{C}_\ell(n) = \frac{\pi \in \mathsf{C}(n)}{\ell \text{ cycles } \pi = \gamma^1|\cdots|\gamma^\ell} = \frac{\pi \in \mathsf{C}(n)}{\sum_j^n \underline{\pi}_j = \ell}$$

$$\mathsf{C}_1(n) = \text{ cycles}$$

$$\mathsf{C}^\sharp_1(1+n) = n\,\mathsf{C}^\sharp_1(n) \Longrightarrow \mathsf{C}^\sharp_1(n) = (n-1)!$$

$$i_1|\cdots|i_n \text{ 1-cycle von } n \Longrightarrow \text{ insert 0 zwischen } i_k|i_{k+1} \Longrightarrow n \text{ choices}$$

$$\mathsf{C}^\sharp_\ell(1+n) = n\,\mathsf{C}^\sharp_\ell(n) + \mathsf{C}^\sharp_{\ell-1}(n)$$

$$\pi \in \mathsf{C}_{\ell-1}(n) \Longrightarrow \bar{0}|\pi \in \mathsf{C}_\ell(1+n) \Longrightarrow \text{ get all } \sigma \in \mathsf{C}_\ell(1+n): \quad \sigma_0 = 0$$

$$\pi = \gamma^1|\cdots|\gamma^\ell \in \mathsf{C}_\ell(n): \quad 1 \leqslant i \leqslant n: \quad i \in \gamma^k \Longrightarrow \gamma^1|\cdots|\gamma^{k-1}|\cdot\cdot 0i\cdots|\gamma^{k+1}|\cdots|\gamma^\ell$$

$$\text{n choices to insert 0 before any } 1 \leqslant i \leqslant n \text{ im gleichen cycle } \Longrightarrow \text{ get all } \sigma \in \mathsf{C}_\ell(1+n): \quad \sigma_0 = i \neq 0$$

$$\sum_\ell^{1|n} x^\ell\,\mathsf{C}_\ell(n) = (x)_n = x(x+1)\cdot\cdot(x+n-1)$$

$$\mathsf{C}_{n+}(n) = 0 = \mathsf{C}_0(n)$$

$$\sum_\ell^{1|n+} x^\ell\,\mathsf{C}_\ell(n+) = \sum_\ell^{1|n+} x^\ell \left(n\mathsf{C}_\ell(n) + \mathsf{C}_{\ell-}(n)\right) = n\sum_\ell^{1|n+} x^\ell\,\mathsf{C}_\ell(n) + \sum_\ell^{1|n+} x^\ell\,\mathsf{C}_{\ell-}(n)$$

$$= n\sum_\ell^{1|n} x^\ell\,\mathsf{C}_\ell(n) + \sum_\ell^{2|n+} x^\ell\,\mathsf{C}_{\ell-}(n) = n\sum_\ell^{1|n} x^\ell\,\mathsf{C}_\ell(n) + x\sum_k^{1|n} x^k\,\mathsf{C}_k(n)$$

$$\underset{\text{ind}}{=} n(x)_n + x(x)_n = (x)_n(x+n) = (x)_{n+}$$