$$x_{n+1} = a\,x_n + b_n$$

$$x_{n+2} = a\,x_{n+1} + b_{n+1} = a\,(ax_n + b_n) + b_{n+1} = a^2\,x_n + a\,b_n + b_{n+1}$$

$$x_{n+3} = a\,x_{n+2} + b_{n+2} = a\left(a^2 x_n + ab_n + b_{n+1}\right) + b_{n+2} = a^3\,x_n + a^2\,b_n + a\,b_{n+1} + b_{n+2}$$

$$x_n = a^n\,x_0 + \sum_{0 \leqslant m \leqslant n-1} a^{n-m-1}\,b_m = a^n\,x_0 + \sum_{1 \leqslant m \leqslant n} a^{n-m}\,b_{m-1}$$