Menge U Relation-Algebra

n-stellige Regel $R_n \subset U^{1+n} = \dfrac{a_0{:}a_1{:}\cdots{:}a_n}{a_i \in U}$

1-stellig $R_1 \subset U \times U$

$$V \underset{\text{abg}}{\subset} U \Leftrightarrow \begin{cases} a_0{:}\cdots{:}a_{n-1} \in V \\ (a_0{:}a_1{:}\cdots{:}a_n) \in R_n \end{cases} \Longrightarrow a_n \in V$$

$$\bigwedge_{\alpha} V_\alpha \underset{\text{abg}}{\subset} U \Rightarrow \bigcap_{\alpha} V_\alpha \underset{\text{abg}}{\subset} U$$

$$\begin{cases} (a_0{:}a_1{:}\cdots{:}a_n) \in R_n \\ a_0{:}\cdots{:}a_{n-1} \in \bigcap_{\alpha} V_\alpha \end{cases} \Longrightarrow \bigwedge_{\alpha} a_0{:}\cdots{:}a_{n-1} \in V_\alpha \underset{V_\alpha \underset{\text{abg}}{\subset} U}{\Longrightarrow} a_n \in V_\alpha \Rightarrow a_n \in \bigcap_{\alpha} V_\alpha$$

$$\hat{V} = \bigcap_{V \subset W \underset{\text{abg}}{\subset} U} W \text{ outer hull}$$

0-stellig $O = \underline{U} \subset U$

$$U^{1+n} \ni a_0|\cdots|a_n \text{ Ableitung } \Leftrightarrow \bigwedge_{0 \leqslant m \leqslant n} a_m \in O \text{ oder } \bigvee_{0 \leqslant i_1 < \cdot\cdot < i_k < m} a_{i_1}{:}\cdots{:}a_{i_k}{:}a_m \in R_k^m$$

jedes $a_m \notin U \llcorner O$ begrundet durch k-stellige Regel R_k^m

$$\text{Ableitung } a_0|\cdots|a_n \Longrightarrow \bigwedge_{0 \leqslant m \leqslant n} a_0|\cdots|a_m \text{ Ableitung}$$

$$\bar{O} = \frac{a \in U}{a \text{ ableitbar}} \underset{\text{abg}}{\subset} U$$

$$\begin{cases} a_1|\cdots|a_n|a \in R_n \\ a_1 \cdot\cdot a_n \in \bar{O} \end{cases} \Longrightarrow \bigwedge_{1 \leqslant j \leqslant n} \bigvee_{\text{Ableitung}} a_j^0 \,|\, a_j^1 \,|\cdots|\, a_j^{\ell_j} = a_j$$

$$a_1^0 \,|\, a_1^1 \,|\cdot\cdot|\, a_1^{\ell_1} \,|\, a_2^0 \,|\, a_2^1 \,|\cdot\cdot|\, a_2^{\ell_2} \,|\cdot\cdot|\, a_n^0 \,|\, a_n^1 \,|\cdot\cdot|\, a_n^{\ell_n} |a \text{ Ableitung } \Longrightarrow a \in \bar{O} \text{ ableitbar}$$

jedes Glied der Folge aus vorhergehenden Gliedern begrundet

$$0 \leqslant m \leqslant \ell_j \Longrightarrow a_j^m \in O \text{ oder} \bigvee_{0 \leqslant i_1 < \cdot\cdot < i_k < m} a_j^{i_1} : \cdots : a_j^{i_k} : a_j^m \in R_k^m \text{ Begrundung von } a_j^m$$

$$a_1^{\ell_1} = a_1 \,|\, a_2^{\ell_2} = a_2 \,|\cdots|\, a_n^{\ell_n} = a_n |a \in R_n \text{ Begrundung von a}$$

$$O \subset V \underset{\text{abg}}{\subset} U \overset{\text{Ind}}{\underset{\text{Satz}}{\Longrightarrow}} \bar{O} \subset V$$

$$n \geqslant 0: \quad U_n = \frac{a \in U}{\bigvee_{\text{Ableitung}} a_0|\cdots|a_n = a} \text{ in } \leqslant n \text{ Schritten ableitbar}$$

$$\text{Ind}_{n \geqslant 0}: \quad U_n \subset V$$

$$n = 0: \quad U_0 = O \subset V$$

$$n \curvearrowright n+: \quad a \in U_{n+} \Longrightarrow \bigvee_{\text{Ableitung}} a_0|\cdots|a_n|a$$

$$\bigwedge_{0 \leqslant m \leqslant n} a_0|\cdot\cdot|a_m \text{ Ableitung in } m \leqslant n \text{ Schritten } \Longrightarrow a_m \in U_n \underset{\text{Ind}}{\subset} V$$

$$\bigvee_{0 \leqslant i_1 < \cdot\cdot < i_k \leqslant n} a_{i_1}:\cdots:a_{i_k}:a \in R_k: \quad a_{i_1} \cdot\cdot a_{i_k} \in V \underset{\text{abg}}{\subset} U \Longrightarrow a \in V$$

$$\Longrightarrow \bar{O} = \bigcup_{n \geqslant 0} U_n \subset V$$