

$$\mathbb{1} \in \mathbb{1}_{\mathbb{1}} \text{mod}_{\mathbb{1}}$$

$$\mathbb{1} \in \mathbb{1}^{\sharp} = \text{Hom}(\mathbb{1}, \mathbb{1})$$

$$\mathbb{1} \xleftarrow[\text{bilin}]{R} \mathbb{1} \boxtimes \mathbb{1}$$

$$\mathbb{1} \triangleleft_{\mathbb{1}}^{\mathbb{N}} \xleftarrow{R_{\mathbb{1}}} \mathbb{1} \triangleleft_{\mathbb{1}}^{\mathbb{N}}$$

$$R_{\mathbb{1}} \underbrace{\mathbb{1} \boxtimes \mathbb{1} \boxtimes \dots \boxtimes \mathbb{1}^p}_{0 \leq i < j \leq n} = \sum_{0 \leq i < j \leq n} \binom{j-i}{-1} \underbrace{\mathbb{1} R \mathbb{1}^j}_{\mathbb{1} R \mathbb{1}^j} \mathbb{1} \boxtimes \dots \boxtimes \mathbb{1}^i \boxtimes \dots \boxtimes \mathbb{1}^j \boxtimes \dots \boxtimes \mathbb{1}^p$$

$$\underbrace{\mathbb{1} \boxtimes R_{\mathbb{1}}}_{\mathbb{1} \boxtimes R_{\mathbb{1}}} - R_{\mathbb{1}} \underbrace{\mathbb{1} \boxtimes}_{\mathbb{1} \boxtimes} = \underbrace{\mathbb{1} R}_{\mathbb{1} R} \mathbb{1}$$

$$\begin{aligned} R_{\mathbb{1}} \underbrace{\mathbb{1} \boxtimes \mathbb{1} \boxtimes \dots \boxtimes \mathbb{1}^p}_{0 \leq i < j \leq n} &= R_{\mathbb{1}} \underbrace{\mathbb{1} \boxtimes \dots \boxtimes \mathbb{1}^p}_{0 \leq i < j \leq n} = \sum_{0 \leq i < j \leq n} \binom{j-i}{-1} \underbrace{\mathbb{1} R \mathbb{1}^j}_{\mathbb{1} R \mathbb{1}^j} \mathbb{1} \boxtimes \dots \boxtimes \mathbb{1}^i \boxtimes \dots \boxtimes \mathbb{1}^j \boxtimes \dots \boxtimes \mathbb{1}^p \\ &= \mathbb{1} \boxtimes \sum_{1 \leq i < j \leq n} \binom{j-i}{-1} \underbrace{\mathbb{1} R \mathbb{1}^j}_{\mathbb{1} R \mathbb{1}^j} \mathbb{1} \boxtimes \dots \boxtimes \mathbb{1}^i \boxtimes \dots \boxtimes \mathbb{1}^j \boxtimes \dots \boxtimes \mathbb{1}^p - \sum_{1 \leq j \leq n} \binom{j-1}{-1} \underbrace{\mathbb{1} R \mathbb{1}^j}_{\mathbb{1} R \mathbb{1}^j} \mathbb{1} \boxtimes \dots \boxtimes \mathbb{1}^j \boxtimes \dots \boxtimes \mathbb{1}^p \\ &= \underbrace{\mathbb{1} \boxtimes R_{\mathbb{1}} \mathbb{1} \boxtimes \dots \boxtimes \mathbb{1}^p}_{\mathbb{1} \boxtimes R_{\mathbb{1}} \mathbb{1} \boxtimes \dots \boxtimes \mathbb{1}^p} - \underbrace{\mathbb{1} R}_{\mathbb{1} R} \mathbb{1} \boxtimes \dots \boxtimes \mathbb{1}^p = \underbrace{\mathbb{1} \boxtimes R_{\mathbb{1}}}_{\mathbb{1} \boxtimes R_{\mathbb{1}}} - \underbrace{\mathbb{1} R}_{\mathbb{1} R} \mathbb{1} \boxtimes \dots \boxtimes \mathbb{1}^p \end{aligned}$$

$$\mathbb{1} \text{ abel} \Rightarrow \mathbb{1} \boxtimes R_{\mathbb{1}} = R_{\mathbb{1}} \mathbb{1} \boxtimes$$

$$\begin{aligned} \mathbb{1} \boxtimes R_{\mathbb{1}} \mathbb{1} \boxtimes &= \mathbb{1} \boxtimes \underbrace{\mathbb{1} \boxtimes R_{\mathbb{1}} - \mathbb{1} R}_{\mathbb{1} \boxtimes R_{\mathbb{1}} - \mathbb{1} R} \mathbb{1} \boxtimes = \mathbb{1} \boxtimes \mathbb{1} \boxtimes R_{\mathbb{1}} - \mathbb{1} \boxtimes \mathbb{1} R \mathbb{1} \boxtimes \\ &= \underbrace{\mathbb{1} \boxtimes I - \mathbb{1} \boxtimes \mathbb{1} \boxtimes}_{\mathbb{1} \boxtimes I - \mathbb{1} \boxtimes \mathbb{1} \boxtimes} R_{\mathbb{1}} + \underbrace{\mathbb{1} R}_{\mathbb{1} R} \mathbb{1} \boxtimes \mathbb{1} \boxtimes \underset{\text{ind}}{=} \mathbb{1} \boxtimes R_{\mathbb{1}} - \mathbb{1} \boxtimes R_{\mathbb{1}} \mathbb{1} \boxtimes + \underbrace{\mathbb{1} R}_{\mathbb{1} R} \mathbb{1} \boxtimes \mathbb{1} \boxtimes \\ &= R_{\mathbb{1}} \mathbb{1} \boxtimes - R_{\mathbb{1}} \mathbb{1} \boxtimes \mathbb{1} \boxtimes = R_{\mathbb{1}} \underbrace{\mathbb{1} \boxtimes I - \mathbb{1} \boxtimes \mathbb{1} \boxtimes}_{\mathbb{1} \boxtimes I - \mathbb{1} \boxtimes \mathbb{1} \boxtimes} = R_{\mathbb{1}} \mathbb{1} \boxtimes \mathbb{1} \boxtimes \end{aligned}$$

$$\mathbb{1} \triangleleft_{\mathbb{1}}^{\mathbb{N}} \xleftarrow{\exp R_{\mathbb{1}}} \mathbb{1} \triangleleft_{\mathbb{1}}^{\mathbb{N}}$$

$$\mathbb{1} \text{ abel} \Rightarrow R_{\mathbb{F}} S_{\mathbb{F}} = S_{\mathbb{F}} R_{\mathbb{F}}$$

$$\begin{aligned} R_{\mathbb{F}} S_{\mathbb{F}} \mathbb{1}_{\mathbb{X}} &= R_{\mathbb{F}} \mathbb{1}_{\mathbb{X}} S_{\mathbb{F}} - R_{\mathbb{F}} \overline{\mathbb{1}_{\mathbb{S}}} \mathbb{F} = \mathbb{1}_{\mathbb{X}} R_{\mathbb{F}} S_{\mathbb{F}} - \overline{\mathbb{1}_{\mathbb{R}}} \mathbb{F} S_{\mathbb{F}} - \overline{\mathbb{1}_{\mathbb{S}}} \mathbb{F} R_{\mathbb{F}} \\ &= \text{ind } \mathbb{1}_{\mathbb{X}} S_{\mathbb{F}} R_{\mathbb{F}} - S_{\mathbb{F}} \overline{\mathbb{1}_{\mathbb{R}}} \mathbb{F} - \overline{\mathbb{1}_{\mathbb{S}}} \mathbb{F} R_{\mathbb{F}} = S_{\mathbb{F}} \mathbb{1}_{\mathbb{X}} R_{\mathbb{F}} - S_{\mathbb{F}} \overline{\mathbb{1}_{\mathbb{R}}} \mathbb{F} = S_{\mathbb{F}} R_{\mathbb{F}} \mathbb{1}_{\mathbb{X}} \end{aligned}$$

$$\mathbb{1} \text{ abel} \Rightarrow \exp R_{\mathbb{F}} \exp S_{\mathbb{F}} = \exp \overline{R + S}_{\mathbb{F}}$$

$$\exp R_{\mathbb{F}} \exp S_{\mathbb{F}} = \exp \overline{R_{\mathbb{F}} + S_{\mathbb{F}}} = \exp \overline{R + S}_{\mathbb{F}}$$

$$\mathbb{1}_{\mathbb{X}} R_{\mathbb{F}}^n = R_{\mathbb{F}}^n \mathbb{1}_{\mathbb{X}} + n \overline{\mathbb{1}_{\mathbb{R}}} \mathbb{F} R_{\mathbb{F}}^{n-1}$$

$n = 1$: klar

$$\begin{aligned} 1 \leq n \rightsquigarrow n+1: \quad \mathbb{1}_{\mathbb{X}} R_{\mathbb{F}}^{n+1} &\stackrel{\text{ind}}{=} \underbrace{R_{\mathbb{F}}^n \mathbb{1}_{\mathbb{X}} + n \overline{\mathbb{1}_{\mathbb{R}}} \mathbb{F} R_{\mathbb{F}}^{n-1}}_{R_{\mathbb{F}}^n \mathbb{1}_{\mathbb{X}} + n \overline{\mathbb{1}_{\mathbb{R}}} \mathbb{F} R_{\mathbb{F}}^{n-1}} R_{\mathbb{F}} \\ &= R_{\mathbb{F}}^n \overline{R_{\mathbb{F}} \mathbb{1}_{\mathbb{X}} + \overline{\mathbb{1}_{\mathbb{R}}} \mathbb{F}} + n \overline{\mathbb{1}_{\mathbb{R}}} \mathbb{F} R_{\mathbb{F}}^n = R_{\mathbb{F}}^{n+1} \mathbb{1}_{\mathbb{X}} + (n+1) \overline{\mathbb{1}_{\mathbb{R}}} \mathbb{F} R_{\mathbb{F}}^n \end{aligned}$$

$$\mathbb{1}_{\mathbb{X}} \exp R_{\mathbb{F}} = \exp R_{\mathbb{F}} \mathbb{1}_{\mathbb{X}} + \overline{\mathbb{1}_{\mathbb{R}}} \mathbb{F} \exp R_{\mathbb{F}}$$

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \mathbb{1}_{\mathbb{X}} I + \underbrace{\sum_{1 \leq n} \frac{R_{\mathbb{F}}^n}{n!}}_{\mathbb{1}_{\mathbb{X}} + \mathbb{1}_{\mathbb{X}} \sum_{1 \leq n} \frac{R_{\mathbb{F}}^n}{n!}} = \mathbb{1}_{\mathbb{X}} + \mathbb{1}_{\mathbb{X}} \sum_{1 \leq n} \frac{R_{\mathbb{F}}^n}{n!} = \mathbb{1}_{\mathbb{X}} + \sum_{1 \leq n} \frac{R_{\mathbb{F}}^n}{n!} \mathbb{1}_{\mathbb{X}} + \overline{\mathbb{1}_{\mathbb{R}}} \mathbb{F} \sum_{1 \leq n} \frac{n R_{\mathbb{F}}^{n-1}}{n!} \\ &= I + \underbrace{\sum_{1 \leq n} \frac{R_{\mathbb{F}}^n}{n!} \mathbb{1}_{\mathbb{X}}}_{\mathbb{1}_{\mathbb{X}} + \mathbb{1}_{\mathbb{X}} \sum_{1 \leq n} \frac{R_{\mathbb{F}}^n}{n!}} + \overline{\mathbb{1}_{\mathbb{R}}} \mathbb{F} \exp R_{\mathbb{F}} = \text{RHS} \end{aligned}$$